# Übungsaufgaben Kapitel 5
# Lösungen

Prof. Dr. Torben Kuhlenkasper

**Aufgabe 1** Ein Experiment bestehe aus dem Werfen eines Würfels und einer Münze.

1. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum $\Omega$ an.

   Der Ergebnisraum $\Omega$ ist gegeben als

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K),\\ &\quad (1,Z),(2,Z),(3,Z),(4,Z),(5,Z),(6,Z)\}\end{aligned}$$

   Damit ist $|\Omega| = 12$

2. Zeigt die Münze Kopf (K), so wird die doppelte Augenzahl des Würfels notiert, bei Zahl (Z) nur die einfache. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl notiert wird?

   Das beschriebene Experiment läßt sich wie folgt in einer Tabelle veranschaulichen:

| Ergebnis | 1 K | 2 K | 3 K | 4 K | 5 K | 6 K | 1 Z | 2 Z | 3 Z | 4 Z | 5 Z | 6 Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| notierte Augenzahl | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

   Ist $A$ das Ereignis "Eine gerade Zahl wird notiert", d.h.

$$A = \{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K),(2,Z),(4,Z),(6,Z)\}\ ,$$

   dann ist $|A| = 9$ und es ergibt sich

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

**Aufgabe 2**

In einer Gruppe von 150 Studierenden sind 40 im 1. Studienjahr, die Hälfte der 30 Studierenden im 4. Studienjahr wohnt in Pforzheim, 26 der 35 im 2. Studienjahr wohnen nicht in Pforzheim, 8 im 3. Studienjahr wohnen in Pforzheim und ein Drittel derjenigen, die in Pforzheim wohnen, ist im 4. Studienjahr.

Erstellen Sie aus diesen Angaben eine (2x4) Kontingenztafel.

Berechnen Sie unter der Annahme, dass jeder Student mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden kann, die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden vier Ereignisse:

Ein zufällig ausgewählter Student

A: wohnt in Pforzheim

B: ist im 2. Studienjahr

C: wohnt nicht in Pforzheim und ist im 3. Studienjahr

D: wohnt in Pforzheim und ist noch nicht im 4. Studienjahr

Als (2x4) Kontingenztafel ergibt sich:

| | Studienjahr | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Wohnort | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
| Pforzheim | 13 | 9 | 8 | 15 | 45 |
| nicht Pforzheim | 27 | 26 | 37 | 15 | 105 |
| $\Sigma$ | 40 | 35 | 45 | 30 | 150 |

Allgemein gilt:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ereignisse}}{\text{Anzahl möglicher Ereignisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{45}{150} = 0.3 \\
P(B) &= \frac{35}{150} = 0.23 \\
P(C) &= \frac{37}{150} = 0.247 \\
P(D) &= \frac{13+9+8}{150} = \frac{30}{150} = 0.2
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3**

Aus einer Gruppe von drei männlichen Absolventen und vier weiblichen Absolventen sind drei Jobs in verschiedenen Unternehmen zu besetzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse, dass mindestens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird bzw., dass höchstens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird,

1. falls jede Person nur eine Position erhalten kann?
2. falls jede Person mehrere Positionen erhalten kann?

Die Grundgesamtheit ergibt sich hier als $G = \{M, M, M, F, F, F, F\}$ und damit ist $|G| = 7$. Die drei Positionen sind nach dem Zufallsprinzip zu besetzen. Das entspricht einer Ziehung aus $G$ mit $n = 7$ vom Umfang $k = 3$.

(a) Falls jede Person nur eine Position erhalten kann, liegt eine Ziehung ohne Zurücklegen vor, bei der die Anzahl möglicher Stichproben berechnet wird als

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

(a1) Bezeichnet man mit $A$ das Ereignis "Mindestens eine der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt", d.h. "1, 2 oder alle 3 Positionen werden mit einer Frau besetzt", dann ist das Ereignis $\overline{A}$ gegeben als "Keine der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt". Die Anzahl aller möglichen Stichproben, die zu $\overline{A}$ führen, ergibt sich als Anzahl aller Permutationen der drei Männer, also als $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Damit ist $P(\overline{A}) = \frac{6}{210} = 0.0286$ und es folgt $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.0286 = 0.9714$.

(a2) Bezeichnet man mit $B$ das Ereignis "Höchstens eine der 3 Positionen wird mit einer Frau besetzt", d.h. "1 oder keine Position wird mit einer Frau besetzt", dann entspricht $B$ den folgenden Ergebnissen mit der jeweiligen Anzahl von Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} (M, M, M) &: \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ Möglichkeiten} \\ (M, M, F) &: \quad 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ Möglichkeiten} \\ (M, F, M) &: \quad 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ Möglichkeiten} \\ (F, M, M) &: \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ Möglichkeiten} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man: $|B| = 78$ und somit $P(B) = \frac{78}{210} = 0.3714$

(b) Falls jede Person mehrere Positionen erhalten kann, liegt eine Ziehung mit Zurücklegen vor, bei der die Anzahl möglicher Stichproben berechnet wird als

$$n^k = 7^3 = 343 \qquad (1)$$

(b1) Hier ergibt sich für $|\overline{A}| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ und damit $P(A) = 1 - \frac{27}{343} = 0.9213$

(b2) B entspricht den folgenden Ergebnissen mit der jeweiligen Anzahl von Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}(M,M,M) &: \quad 3\cdot 3\cdot 3 = 27 \text{ Möglichkeiten}\\ (M,M,F) &: \quad 3\cdot 3\cdot 4 = 36 \text{ Möglichkeiten}\\ (M,F,M) &: \quad 3\cdot 4\cdot 3 = 36 \text{ Möglichkeiten}\\ (F,M,M) &: \quad 4\cdot 3\cdot 3 = 36 \text{ Möglichkeiten}\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man: $|B| = 135$ und somit $P(B) = \frac{135}{343} = 0.3936$

**Aufgabe 4**

Sind die folgenden Aussagegen wahr oder falsch?

1. Die Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments ist die Ergebnismenge $\Omega$. (WAHR)
2. Falls $\Omega$ endlich ist, besitzen alle Elemente von $\Omega$, d.h. die sogenannten Elementarereignisse, dieselbe Wahrscheinlichkeit. (FALSCH)
3. Die leere Menge wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung das sichere Ereignis genannt. (FALSCH)
4. Ein zufälliges Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge. (WAHR)
5. Bei einer endlichen Ergebnismenge kann man alle möglichen Wahrscheinlichkeiten berechnen, wenn man die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse kennt. (WAHR)
6. Für Elementarereignisse $\{\omega\}$ gilt grundsätzlich $P(\{\omega\}) = 0$. (FALSCH)

**Aufgabe 5**

In vielen Ländern besteht ein Autokennzeichen aus 5 Zeichen. Die ersten beiden Zeichen sind Buchstaben, die restlichen Ziffern.

1. Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es?

   $26^2 \cdot 10^3 = 676\,000$

2. Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf?

   $26^2 \cdot (10)_3 = 676 \cdot 720 = 486\,720$

3. Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es, wenn nicht 3 Nullen gleichzeitig auftreten dürfen?

   $26^2 \cdot 10^3 - 26^2 = 26^2 \cdot \left(10^3 - 1\right) = 676000 - 676 = 675\,324$

*(Hinweis: Gehen Sie von den 26 Großbuchstaben von A bis Z aus)*

**Aufgabe 6**

Eine Gruppe von 60 Drogenabhängigen, die Heroin spritzen, nimmt an einer Therapie teil ($A$ = stationär, $\overline{A}$ = ambulant). Zudem unterziehen sich die Drogenabhängigen freiwillig einem HIV-Test ($B$ = HIV-positiv, $\overline{B}$ = HIV-negativ). Dabei stellen sich 45 der 60 Personen als HIV-negativ und 15 als HIV-positiv heraus. Von denen, die HIV-positiv sind, sind 80 % in der stationären Therapie, während von den HIV-Negativen nur 40 % in der stationären Therapie sind.

(a) Formulieren Sie die obigen Angaben als Wahrscheinlichkeiten.

   Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeiten:

   $P(\overline{B}) = \frac{45}{60} = 0.75$, $P(B) = \frac{15}{60} = 0.25$

   $P(A|B) = 0.8$ , $P(A|\overline{B}) = 0.4$

(b) Sie wählen zufällig eine der 60 drogenabhängigen Personen aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß diese (b1) an der stationären Therapie teilnimmt und HIV-positiv ist,

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2$$

(b2) an der stationären Therapie teilnimmt und HIV-negativ ist,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3$$

(b3) an der stationären Therapie teilnimmt.

$$P(A) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

(c) Berechnen Sie $P(B|A)$, und fassen Sie das zugehörige Ereignis in Worte.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

Wahrscheinlichkeit von 0.4, dass eine zufällig ausgewählte Person, die in stationärer Behandlung ist, HIV-positiv ist.

(d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $P(A|B)$ und $P(A)$, wenn $A$ und $B$ unabhängig sind?

Sind $A$ und $B$ unabhängig, dann gilt $P(A|B) = P(A)$

**Aufgabe 7**

Ein Laboratorium hat einen Alkohol-Test entworfen. Aus den bisherigen Erfahrungen weiß man, daß 60 % der von der Polizei kontrollierten Personen tatsächlich betrunken sind. Bezüglich der Funktionsweise des Tests wurde ermittelt, daß

- in 95 % der Fälle der Test positiv reagiert, wenn die Person tatsächlich betrunken ist,
- in 97 % der Fälle der Test negativ reagiert, wenn die Person nicht betrunken ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person betrunken ist, wenn der Test positiv reagiert?

- Ereignis $B$: Person ist betrunken
- Ereignis $P$: Test ist positiv

$\Rightarrow$ $P(B) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.4$

$P(P|B) = 0.95$

$P(\overline{P}|\overline{B}) = 0.97$, $P(P|\overline{B}) = 0.03$

- gesucht:

$$
\begin{aligned}
P(B|P) &= \frac{P(B \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|B) \cdot P(B)}{P(P|B) \cdot P(B) + P(P|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})} \\
&= \frac{0.95 \cdot 0.6}{0.95 \cdot 0.6 + 0.03 \cdot 0.4} = 0.979
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 8**

Jeder Mensch besitzt unveränderliche Blutmerkmale. Man unterscheidet die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 und den Rhesusfaktor R+ und R-. Blutgruppe A tritt bei 42 %, B bei 10 %, AB bei 4 % und 0 bei 44 % der Menschen auf. Menschen mit Blutgruppe A und Menschen mit Blutgruppe 0 haben mit Wahrscheinlichkeit 0.85 Rhesusfaktor R+. Dagegen tritt bei Menschen mit Blutgruppe B Rhesusfaktor R+ nur noch mit Wahrscheinlichkeit 0.8 auf und bei Menschen mit Blutgruppe AB sogar nur noch mit Wahrscheinlichkeit 0.75.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Rhesusfaktors R+.

Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für die vier Blutgruppen:

$P(A) = 0.42,\ P(B) = 0.10,\ P(AB) = 0.0.04,\ P(0) = 0.44$

sowie

$P(R+|A) = 0.85,\ P(R+|0) = 0.85,\ P(R+|B) = 0.8,\ P(R+|AB) = 0.75$

gesucht ist:

$$\begin{aligned}
P(R{+}) &= P(R+|A)\cdot P(A) + P(R+|B)\cdot P(B) \\
&+ P(R+|AB)\cdot P(AB) + P(R+|0)\cdot P(0) \\
&= 0.85\cdot 0.42 + 0.8\cdot 0.1 + 0.75\cdot 0.04 + 0.85\cdot 0.44 \\
&= 0.841
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Bayes die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mensch mit Rhesusfaktor R+ der Blutgruppe AB angehört.

$$\begin{aligned}
P(AB|R{+}) &= \frac{P(R+|AB)\cdot P(AB)}{P(R{+})} \\
&= \frac{0.75\cdot 0.04}{0.841} = 0.036
\end{aligned}$$

**Aufgabe 9**

Eine Krankenversicherung ermittelte, daß bei Verkehrsunfällen von Autofahrern, die angeschnallt waren, 20 Prozent Kopfverletzungen aufwiesen. Bei nicht angeschnallten Fahrern, wiesen 40 Prozent Kopfverletzungen auf. Trotz Anschnallpflicht legen noch immer 20 Prozent aller Autofahrer keinen Gurt an.

In ein Krankenhaus wird ein Autofahrer eingeliefert, der nach einem Autounfall eine Kopfverletzung aufweist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er **nicht** angeschnallt war?

- Ereignis $A$: Person war angeschnallt
- Ereignis $K$: Person hat eine Kopfverletzung

$\Rightarrow$ $P(K|A) = 0.2,\ P(K|\overline{A}) = 0.4$

$P(\overline{A}) = 0.2,\ P(A) = 0.8$

- gesucht:

$$P(\overline{A}|K) \quad = \quad = \frac{P(K|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}{P(K|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) + P(K|A) \cdot P(A)}$$

$$= \quad \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.4 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8} = 0.33$$

**Aufgabe 10**

Für Ihr Kundenkonto bei einem Online-Versandhändler müssen Sie ein Passwort erstellen. Dieses Passwort soll aus insgesamt 10 Zeichen bestehen.

Es stehen Ihnen die 26 Großbuchstaben, die 26 Kleinbuchstuben, alle Ziffern und 8 Sonderzeichen zur Verfügung.

1. Wie viele mögliche Passwörter können Sie erstellen?

   $n = 26 + 26 + 10 + 8 = 70$

   $k = 10$

   Ziehen mit Zurücklegn und mit Beachten der Reihenfolge

   $70^{10} = 2.82 \cdot 10^{18}$

2. Das Passwort soll zunächst aus 5 Sonderzeichen und dann aus Kleinbuchstaben bestehen. Ein Sonderzeichen darf dabei nur einmal vorkommen. Wie viele Möglichkeiten ein Passwort zu erstellen gibt es nun?

   Stellen 1 bis 6: $n = 8, k = 5$: Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachten der Reihenfolge:

$$\begin{aligned}(8)_5 &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \\ &= \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6720\end{aligned}$$

   Stellen 6 bis 10: $n = 26, k = 5$: Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachten der Reihenfolge:

   $26^5 = 11881376$

   Somit gibt es insgesamt $6720 \cdot 11881376 = 79842846720$ Möglichkeiten