

Übungsaufgaben Kapitel 18

Lösungen

Prof. Dr. Torben Kuhlenkasper

Aufgabe 1

377 Personen wurden nach ihrem Einkommen befragt. Außerdem sollten sie angeben, wie zufrieden sie sind.

Es ergab sich folgende Tabelle:

	sehr unzufrieden	unzufrieden	zufrieden	sehr zufrieden
bis 3000 EUR	20	24	80	82
über 3001 EUR	7	18	54	92

Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test, ob Einkommen und Zufriedenheit unabhängig sind ($\alpha = 0.05$).

Überprüfung mit dem χ^2 -Unabhängigkeitstest!

Es gilt:

H_0 : Einkommen und Zufriedenheit sind unabhängig

H_1 : Einkommen und Zufriedenheit sind nicht unabhängig

Es gilt: $n_{1.} = 206$, $n_{2.} = 171$ und $n_{.1} = 27$, $n_{.2} = 42$, $n_{.3} = 134$, $n_{.4} = 174$ sowie $n = 377$

Es ergeben sich für die erwarteten Werte unter H_0 :

$$\tilde{n}_{11} = \frac{206 \cdot 27}{377} = 14.75 \quad \tilde{n}_{12} = \frac{206 \cdot 42}{377} = 22.95 \quad \tilde{n}_{13} = \frac{206 \cdot 134}{377} = 73.22 \quad \tilde{n}_{14} = \frac{206 \cdot 174}{377} = 95.08$$

$$\tilde{n}_{21} = \frac{171 \cdot 27}{377} = 12.25 \quad \tilde{n}_{22} = \frac{171 \cdot 42}{377} = 19.05 \quad \tilde{n}_{23} = \frac{171 \cdot 134}{377} = 60.78 \quad \tilde{n}_{24} = \frac{171 \cdot 174}{377} = 78.92$$

Teststatistik:

$$\begin{aligned}
X^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}} \\
&= \frac{(20 - 14.75)^2}{14.75} + \frac{(24 - 22.95)^2}{22.95} + \frac{(80 - 73.22)^2}{73.22} + \frac{(82 - 95.08)^2}{95.08} \\
&\quad + \frac{(7 - 12.25)^2}{12.25} + \frac{(18 - 19.05)^2}{19.05} + \frac{(54 - 60.78)^2}{60.78} + \frac{(92 - 78.92)^2}{78.92} \\
&= 9.57
\end{aligned}$$

H_0 ablehnen, wenn $X^2 > \chi_{3;0.95}^2$.

Da $9.57 > 7.8147$, lehnen wir H_0 ab.

Wir gehen davon aus, dass die Einkommen und Zufriedenheit nicht unabhängig sind.

Aufgabe 2

Studienanfänger wurden gefragt, ob sie noch bei den Eltern wohnen, und welche Partei sie wählen würden. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse der Umfrage.

Table 1: Ergebnis einer Umfrage

	Partei	CDU	SPD	FDP	Grüne
Wohnen bei den Eltern					
ja		35	25	5	10
nein		40	20	15	25

Testen Sie, ob sich das Wahlverhalten der Studenten, die bei den Eltern wohnen, von dem Wahlverhalten der Studenten, die nicht bei den Eltern wohnen, unterscheidet. ($\alpha = 0.05$) χ^2 -test for homogeneity

1. H_0 : Die Variablen sind unabhängig *gegen* H_1 : Die Variablen sind nicht unabhängig.

2. χ^2 -Test mit der Teststatistik $X^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}}$

3. Unter H_0 ist X^2 χ^2 -verteilt mit $(I - 1) \cdot (J - 1)$ Freiheitsgraden.

Wir erhalten als kritischen Wert aus der Tabelle: $\chi_{(2-1)(4-1);0.95}^2 = \chi_{3;0.95}^2 = 7.81$

4. Wir lehnen H_0 ab, falls $X^2 \geq \chi_{(I-1) \cdot (J-1);0.95}^2$

5. Wir erhalten $n_{1.} = 75$ und $n_{2.} = 100$ sowie $n_{.1} = 75$, $n_{.2} = 45$, $n_{.3} = 20$, $n_{.4} = 35$ und $n = 175$

Wir erhalten für die erwarteten Häufigkeiten $\tilde{n}_{11} = \frac{75 \cdot 75}{175} = 32.14$, $\tilde{n}_{21} = \frac{100 \cdot 75}{175} = 42.86$,

$\tilde{n}_{12} = 19.29$, $\tilde{n}_{22} = 25.71$, $\tilde{n}_{13} = 8.57$, $\tilde{n}_{23} = 11.43$, $\tilde{n}_{14} = 15$ and $\tilde{n}_{24} = 20$

Wir erhalten somit $X^2 = \frac{(35-32.14)^2}{32.14} + \dots + \frac{(25-20)^2}{20} = 8.93$

6. Da $8.93 > 7.81$, lehnen wir H_0 ab.

7. Wir können somit von einem unterschiedlichen Wahlverhalten von Studenten ausgehen, je nachdem ob die Studenten noch zu Hause wohnen oder nicht.