Übungsaufgaben Kapitel 14
Lösungen

Prof. Dr. Torben Kuhlenkasper

Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Bei einem klassischen Hypothesentest kann man nur dann eine relativ sichere Aussage machen, wenn die Hypothese verworfen wird.

WAHR Wenn man H_0 ablehnt, ist die Fehlerwahrscheinlichkeit mit einem kleinen α (z.B. $\alpha = 0.05$) begrenzt und man trifft mit $1 - \alpha$ eine richtige Entscheidung.

(b) Mit einem klassischen Signifikanztest kann man entscheiden, ob Hypothesen richtig oder falsch sind.

FALSCH Man trifft nur eine Entscheidung über Hypothesen. Ob diese richtig oder falsch sind, ist vor dem Test ja unbekannt.

(c) Wird bei einem klassischen Signifikanztest die Nullhypothese verworfen, so kann man ziemlich sicher sein, dass sie nicht gilt.

WAHR s. Aufgabe 1 (a)

(d) Wird bei einem klassischen Signifikanztest die Nullhypothese nicht verworfen, so kann man ziemlich sicher sein, dass sie gilt.

FALSCH Entscheidet man sich für H_0, so kann man in der Regel nichts über die Fehlerwahrscheinlichkeit sagen.

(e) Bei einem klassischen Hypothesentest wählt man im Allgemeinen nur die Wahrscheinlichkeit des α-Fehlers klein.

WAHR Die Wahrscheinlichkeit des β-Fehlers kann nicht a-priori klein gewählt werden, da die Verteilung unter H_1 in der Regel unbekannt ist.

(f) Bei geschickter Wahl des Ablehnungsbereiches lassen sich α- und β-Fehler gleichzeitig klein halten.

FALSCH Die beiden Fehler bedingen sich: wird der eine kleiner, wird der andere größer und umgekehrt. Da nur die Verteilung unter H_0 bekannt ist, kann nur der α-Fehler klein gehalten werden.

(g) Beim klassischen Signikanztest fällt die Prüfgröße unter der Nullhypothese mit Wahrscheinlichkeit α in den Ablehnungsbereich und mit Wahrscheinlichkeit β in den Nicht-Ablehnungsbereich.

FALSCH Der erste Teil der Aussage ist richtig, allerdings nicht der zweite: die Wahrscheinlichkeit β kann nicht berechnet werden.

(h) Der P-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Prüfgröße in den vorher festgelegten Ablehnungsbereich fällt

FALSCH Wird die Überschreitungswahrscheinlichkeit (=p-Wert) berechnet, braucht man keinen Ablehnungsbereich festlegen. Der Wert gibt an, wie wahrscheinlich der Wert der Teststatistik (oder Werte, die noch stärker Richtung H_1 deuten) sind, **wenn H_0 zutrifft.**

(i) Ist der P-Wert sehr klein, so kann man ziemlich sicher sein, dass die Alternative gilt.

WAHR Somit ist nämlich der Wert der Teststatistik unter H_0 sehr unwahrscheinlich und somit trifft H_0 auch nicht zu (grob, nicht mathematisch exakt gesprochen: die Wahrscheinlichkeit für H_0 ist dann sehr klein)

(j) Ist der P-Wert 0.14, so wird die Nullhypothese bei $\alpha = 0.1$ verworfen

FALSCH Nur wenn der p-Wert **kleiner oder gleich** α ist, wird H_0 verworfen. Hier die Wahrscheinlichkeit **nicht klein genug** und somit wird H_0 **nicht** abgelehnt. (Daher kommt auch der Begriff des *nicht Ablehnens* anstelle von H_0 akzeptieren)

(k) Würde man die Nullhypothese bei einem P-Wert von 0.0932 verwerfen, so wäre die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art 0.0932.

WAHR Der p-Wert ist genau die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art (α-Fehler), da er errechnet wird wenn H_0 zutrifft.

Aufgabe 2

Ein Pforzheimer Student behauptet, daß er erkennt, ob bei einer Tasse Kaffee mit Milch aus der Cafeteria zuerst die Milch oder zuerst der Kaffee eingegossen wurde. Sie wollen überprüfen, ob die Behauptung des Studenten zutrifft.

a) Wie gehen Sie vor?

Mit Hilfe einer Stichprobe soll der Student getestet werden.

Ihm werden mehrere Tassen gereicht, in die **ohne sein Wissen** zuerst Milch oder zuerst Kaffee gefüllt wurde.

Er soll jeweils sagen, was zuerst in die jeweilige Tasse gefüllt wurde.

Wir vergleichen dann seine Beobachtungen mit unserem Wissen über die Befüllung der Tassen.

b) Formulieren Sie geeignete statistische Hypothesen.

H_0: Der Student rät
H_1: Der Student rät nicht

- Sei R das Ereignis, daß der Student die richtige Wahl trifft, und $\bar{R}$ das Ereignis, daß er die falsche Wahl trifft.

- Außerdem sei $p = P(R)$.

$\Longrightarrow$ Rät der Student, so ist $p = 0.5$, rät er nicht, so gilt $p > 0.5$.

(Würde er raten, könnte er auch eine Münze werfen, um zu sagen, was zuerst in die Tasse gefüllt wurde)

- Die Hypothese und Gegenhypothese lauten also

$$\begin{aligned} H_0 &: p \leq 0.5 \\ H_1 &: p > 0.5 \end{aligned}$$

c) Bei sechs Versuchen gibt der Student fünfmal die richtige Antwort, ob zuerst der Kaffee oder zuerst die Milch eingegossen wurde.

c1) Berechnen Sie die Überschreitungswahrscheinlichkeit.

- Wenn wir dem Studenten nicht nach jedem Versuch sagen, ob seine Entscheidung richtig oder falsch ist, lernt er bei den Versuchen nichts dazu.
- Also sind die einzelnen Versuche unabhängig.
- Außerdem bleibt $P(R) = 0.5$ konstant.
- Wir beobachten also einen Bernoulliprozeß der Länge 6 mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.5$ unter H_0.

- Dann ist die Anzahl der Erfolge mit den Parametern $n = 6$ und $p = 0.5$ binomialverteilt.
- Es gilt also
$$P(S = s) = \binom{6}{s} 0.5^6 \quad \text{für} \quad s = 0, 1, \ldots, 6.$$
- Wir bestimmen für das Beispiel die Wahrscheinlichkeit, den beobachteten Wert und noch extremere (in Richtung H_1) zu beobachten.
$$P_{H_0}(S \geq 5) = P_{H_0}(S = 5) + P_{H_0}(S = 6) = 0.093750 + 0.015625 = 0.109375$$

c2) Zu welcher Entscheidung kommen Sie: Glauben Sie dem Studenten?

- Wenn wir von einem α von z.B. 0.05 ausgehen, lehnen wir H_0 nicht ab und gehen trotz seiner fünf richtigen Versuche davon aus, dass er rät!