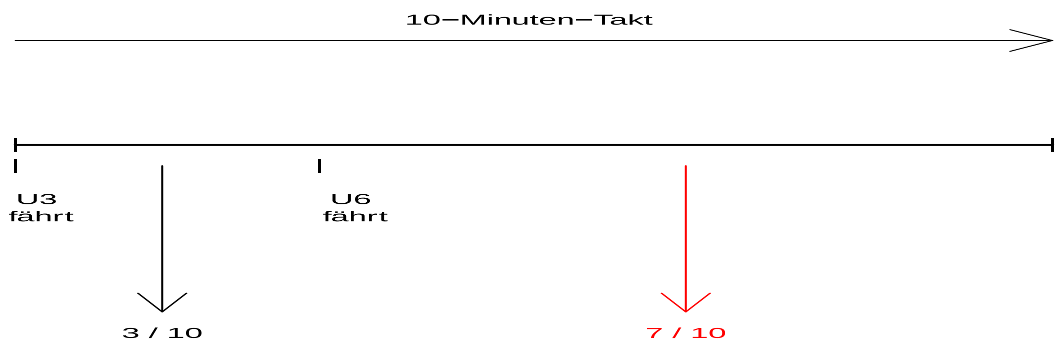
Übungsaufgaben Kapitel 10
Lösungen

Prof. Dr. Torben Kuhlenkasper

Aufgabe 1

An der Münchener U-Bahn-Station "Universität" verkehren zwei Linien tagsüber jeweils im 10-Minuten-Takt, wobei die U3 drei Minuten vor der U6 fährt. Sie gehen gemäß einer stetigen Gleichverteilung nach der Vorlesung zur U-Bahn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß als nächstes die Linie U3 fährt?

Mit Wahrscheinlichkeit von 0.7 ist als letztes eine U6 gefahren, so daß als nächstes mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 eine U3 fährt.



Aufgabe 2

In der Bibliothek der Hochschule ist der einzige Fotokopierer ausgefallen. Über die Zeit X (in Stunden), die ein Techniker benötigt, um den Fotokopierer zu reparieren, ist bekannt, daß diese einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 3$ folgt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Techniker

(a) höchstens eine Viertelstunde,

(b) zwischen 0.5 und 0.75 Stunden,

(c) mehr als 1 Stunde

für die Reparatur benötigt.

Sei X die Zeit in Stunden, die benötigt wird, um den Fotokopierer zu reparieren mit $X \sim Exp(3)$.

Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Damit ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a)

$$P(X \leq 0.25) = F(0.25) = 1 - e^{-3 \cdot 0.25} = 1 - 0.4724 = 0.5276$$

(b)

$$\begin{aligned} P(0.5 < X \leq 0.75) &= F(0.75) - F(0.5) \\ &= 1 - e^{-3 \cdot 0.75} - (1 - e^{-3 \cdot 0.5}) \\ &= e^{-1.5} - e^{-2-25} \\ &= 0.2231 - 0.1054 \end{aligned}$$

0.1177

(c)

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot 1}) = 0.0498$$

Aufgabe 3

In einer Klinik wird eine Studie zum Gesundheitszustand von Frühgeburten durchgeführt. Das Geburtsgewicht X eines in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenen Kindes wird als normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $1000g$ und Standardabweichung $50g$ angenommen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenes Kind ein Gewicht zwischen 982 und 1050 g hat?

(b) Bestimmen Sie das 10 %-Quantil des Geburtsgewichts. Was sagt es aus?

Den Angaben entnimmt man, daß für das Geburtsgewicht $X \sim N(1000, 50^2)$ gilt.

(a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich nach Standardisierung über die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (mit der Tablle) bestimmen als

$$\begin{aligned}
P(982 \leq X \leq 1050 &= P(X \leq 1050) - P(X \leq 982) \\
&= F(1050) - F(982) \\
&= \Phi\left(\frac{1050 - 1000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{982 - 1000}{50}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-0.36) \\
&= \Phi(1) - (1 - \Phi(0.36)) \\
&= 0.8413 - (1 - 0.6406) \\
&= 0.8413 - 0.3594 \\
&= 0.4819
\end{aligned}$$

(b) Das 10%-Quantil ermittel man als

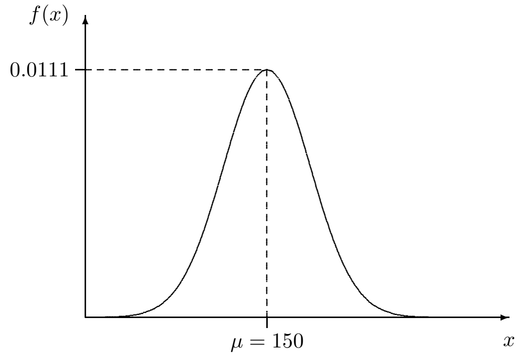
$$\begin{aligned}
x_{0.1} &= \mu + \sigma \cdot z_{0.1} \\
&= \mu + \sigma \cdot (-z_{0.9}) \\
&= 1000 + 50 \cdot (-1.28) \\
&= 936
\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% hat ein in der 28ten Schwangerschaftswoche geborenen Kindes höchstens ein Gewicht von 936 g.

Aufgabe 4

Ein genormter Eingangstest zum Studium sei normalverteilt mit $\mu = 150$ und $\sigma = 36$.

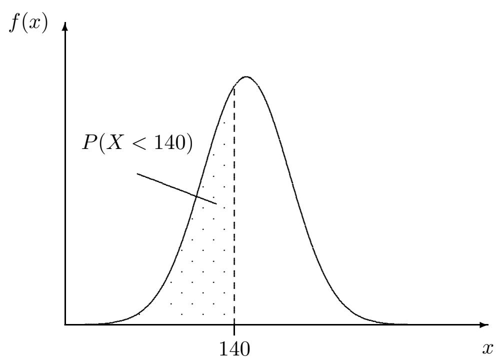
(a) Skizzieren Sie die Dichte dieser Verteilung.



(b) Zeichnen Sie jeweils die folgenden Wahrscheinlichkeiten als Fläche unter der Dichte ein, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, Werte zu erreichen, die

(b1) kleiner sind als 140,

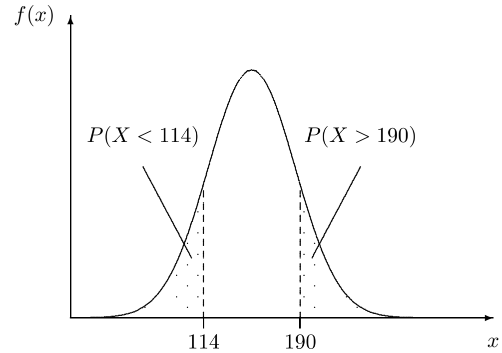
Es wird gesucht:



$$
\begin{aligned}
P(X < 140) &= F(140) \\
&= \Phi\left(\frac{140 - 150}{36}\right) \\
&= \Phi(-0.28) \\
&= 1 - \Phi(0.28) \\
&= 1 - 0.6103 \\
&= 0.3897
\end{aligned}
$$

(b2) nicht im Bereich von 114 bis 190 liegen,

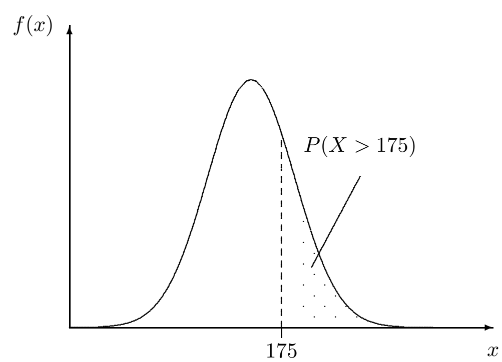
Es wird gesucht:



$$
\begin{aligned}
P(X < 114, X > 190) &= P(X < 114) + P(X > 190) \\
&= F(114) + (1 - F(190)) \\
&= \Phi\left(\frac{114-150}{36}\right) + 1 - \Phi(\frac{190-150}{36}) \\
&= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1.11) \\
&= 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(1.11) \\
&= 2 - 0.8413 - 0.8665 \\
&= 0.2922
\end{aligned}
$$

(b3) größer sind als 175,

Es wird gesucht:



$$\begin{aligned}
P(X > 175) &= 1 - P(X \leq 175) \\
&= 1 - F(175) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{175 - 150}{36}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.69) \\
&= 1 - 0.7549 \\
&= 0.2451
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie den 10 %-Quantilswert, und fassen Sie in Worte, was er aussagt. Gesucht

ist hier $x_{0.1}$ mit $P(X \leq x_{0.1}) = 0.1$. Zur Berechnung nutzt man aus, dass $x_{0.1} = \mu + \sigma \cdot z_{0.1}$. Für das Ablesen in der Tabelle benötigt man

$$x_{0.1} = \mu + \sigma \cdot (-z_{0.9})$$

und erhält mit $z_{0.9} = 1.2816$ aus der Tabelle

$$x_{0.1} = 150 + 36 \cdot (-1.2816) = 103.8624$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% sind die im Leistungstest erreichten Punktezahlen kleiner oder gleich 103.8624.

Aufgabe 5

Welche approximativen Verteilungen besitzen die folgenden Zufallsvariablen?

(a) Der Frauenanteil an der Gesamtzahl der Beschäftigten liegt im Land NRW bei 41.4 %. X_1 sei die Anzahl der Frauen unter 100 zufällig ausgewählten Beschäftigten dieses Landes.

$$X_1 \sim B(100, 0.414) \overset{a}{\sim} N(100 \cdot 0.414, 100 \cdot 0.414 \cdot 0.586) = N(41.4, 24.26)$$

(b) Eine Pharmagroßhandlung beliefert täglich 500 Apotheken. Die Wahrscheinlichkeit einer Reklamation beträgt bei allen Apotheken (unabhäangig voneinander) 0.02. X_2 sei die Anzahl der Reklamationen an einem Tag.

$$X_2 \sim B(500, 0.02) \overset{a}{\sim} Po(500 \cdot 0.02) = Po(10)$$

(c) Ein Mann, der jeden Morgen mit dem Bus zur Arbeit fährt, hat oftmals das Pech, daß die ankommenden Busse überfüllt sind und weiterfahren. Er weiß aus Erfahrung, daß die Anzahl der an einem Morgen vorbeifahrenden Busse Poisson-verteilt ist mit Erwartungswert 1. Sei X_3 die Anzahl der pro Halbjahr (=100 Arbeitstage) vorbeifahrenden Busse.

$$x_3 \sim Po(100) \overset{a}{\sim} N(100, 100)$$

Aufgabe 6

Welche Verteilungen besitzen die folgenden Zufallsvariablen:

(a) Die Anzahl der Richtigen beim Lotto "6 aus 49" (X_1).

Da die Lottozahlen ohne Zurücklegen gezogen werden, ist X_1 hypergeometrisch verteilt. Es gilt $X_1 \sim H(6, 6, 49)$.

(b) Die Anzahl der Richtigen beim Fußballtoto, wenn alle Spiele wegen unbespielbarem Platz ausfallen und die Ergebnisse per Los ermittelt werden (X_2).

Da die Einzelergebnisse voneinander unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeit, ein Einzelergebnis richtig zu tippen, konstant ist, ist X_2 binomialverteilt. Es gilt $X_2 \sim B(11, 1/3)$.

(c) Die Anzahl von Telephonanrufen bei einer Kundenhotline während einer Stunde (X_3).

Falls eher selten angerufen wird, ist, da die einzelnen Anrufe als unabhängig angesehen werden können, X_3 Poisson-verteilt. Dabei ist λ die mittlere Anzahl von Anrufen pro Stunde. Es gilt $X_3 \sim Po(\lambda)$

(d) In einer Urne mit 100 Kugeln befinden sich 5 rote Kugeln. X_4 sei die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe, wenn 10 Kugeln auf einen Schlag entnommen werden.

Ziehen auf einen Schlag entspricht dem Modell ohne Zurücklegen, d.h. X_4 ist hypergeometrisch verteilt. Es gilt $X_4 \sim H(10, 5, 100)$.

(e) Die Anzahl der Studenten, die den Unterschied zwischen der Binomial- und der hypergeometrischen Verteilung verstanden haben, unter 10 zufällig ausgewählten Hörern einer Statistikveranstaltung, an der 50 Studenten teilnehmen (X_5).

Befragungen entsprechen in der Regel dem Ziehen ohne Zurücklegen, d.h. X_5 ist hypergeometrisch verteilt, wobei M Hörer den Unterschied verstanden haben. Es gilt $X_5 \sim H(10, M, 50)$.

(f) Die Stückzahl eines selten gebrauchten Produkts, das bei einer Lieferfirma an einem Tag nachgefragt wird (X_6).

Ist λ die Anzahl, die im Mittel an einem Tag nachgefragt wird, dann ist X_6 Poisson-verteilt. Es gilt $X_6 \sim Po(\lambda)$.

Aufgabe 7

In einer Tüte befinden sich zehn Pralinen: vier aus Nougat und sechs aus Marzipan. Hein, der absolut keine Nougat-Pralinen mag, darf nun drei Pralinen zufällig (ohne Zurücklegen) auswählen.

(a) Wie ist die Anzahl X gezogener Marzipan-Pralinen verteilt? Wieviele Marzipan-Pralinen kann Hein erwarten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Hein

(b) genau 3 Marzipan-Pralinen zieht?

(c) mindestens 1 Marzipan-Praline zieht?

(a) Da hier ohne Zurücklegen gezogen wird, ist die Anzahl X der gezogenen Marzipan-Pralinen hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $n = 3$ (Anzahl der Züge), $M = 6$ (Anzahl der Marzipan-Pralinen in der Tüte) und $N = 10$ (Anzahl der Pralinen insgesamt).

Der Erwartungswert von X ist somit durch

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{6}{10} = 1.8$$

gegeben. Hein kann also im Schnitt mit 1.8 Marzipan-Pralinen rechnen.

(b) Mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, genau drei Marzipan-Pralinen zu ziehen, als

$$P(X = 3) = \frac{\binom{M}{3} \cdot \binom{N-M}{0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = 0.167$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Marzipan-Praline zu ziehen, berechnet sich als:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 0.967.$$

Davon kann Hein also fast mit Sicherheit ausgehen!

Aufgabe 8

Ein Student behauptet schmecken zu können, ob der Kaffee beim Eingießen auf die Milch gegeben wurde oder umgekehrt. Er erklärt sich auch zu einem Experiment bereit. Eine Person füllt zehn Tassen mit Milch und Kaffee. Bei jeder Tasse entscheidet er rein zufällig, ob zuerst die Milch oder zuerst der Kaffee in die Tasse gegeben wird. Nachdem alle Tassen gefüllt sind, wird der Student ins Zimmer gelassen und darf probieren. Nehmen Sie an, er rät nur und tippt bei jeder Tasse (jeweils unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit 0.5 auf die richtige Reihenfolge von Kaffee und Milch. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens achtmal richtig tippt?

Mindestens acht richtige Tips sind gleichbedeutend mit höchstens zwei falschen Tips. Die Anzahl X der falschen Tips unter den zehn Versuchen ist hier aufgrund der Unabhängigkeit binomialverteilt mit den Parametern $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit für einen falschen Tip in einem Versuch) und $n = 10$ (Anzahl der Versuche insgesamt).

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens zwei Tips falsch sind, gegeben durch:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Mit Hilfe der Binomialverteilung ergeben sich diese Wahrscheinlichkeiten als

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{10}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{10} = 0.000977 \\
P(X = 1) &= \binom{10}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^9 = 0.009766 \\
P(X = 2) &= \binom{10}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^8 = 0.043945
\end{aligned}$$

Und damit ist schließlich $P(X \leq 2) = 0.054688$.

Alternativ erhält man dieses Ergebnis direkt mit der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung aus der Tabelle. : $P(X \leq 2) = F(2) = 0.054688$.