

# Statistisches Qualitätsmanagement

Andreas Handl

Torben Kuhlenkasper

8. Januar 2016

*Grundlage des vorliegenden Skripts sind Aufzeichnungen von Andreas Handl, die er bis zum Jahr 2007 an der Universität Bielefeld verfasst und für seine Lehrveranstaltungen verwendet hat. Seit 2012 werden die Skripten von Torben Kuhlenkasper weitergeführt sowie fortlaufend aktualisiert und erweitert.*

*Anmerkungen und Vorschläge zur Verbesserung und Ergänzung sind jederzeit willkommen und können an [statistik@kuhlenkasper.de](mailto:statistik@kuhlenkasper.de) gesendet werden. Weitere Skripten sind unter [www.skripten.kuhlenkasper.de](http://www.skripten.kuhlenkasper.de) zu finden.*

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Allgemeines</b>                                    | <b>5</b>  |
| 1.1      | Historische Entwicklung . . . . .                     | 5         |
| 1.2      | Was ist Qualität? . . . . .                           | 6         |
| 1.3      | Qualitätsmerkmale . . . . .                           | 7         |
| 1.4      | Die "Gurus" . . . . .                                 | 8         |
| 1.5      | Demings 14 Punkte . . . . .                           | 10        |
| 1.6      | Charakteristika von SQM . . . . .                     | 11        |
| <br>     |   |           |
| <b>2</b> | <b>Prozesse</b>                                       | <b>12</b> |
| 2.1      | Was ist ein Prozess? . . . . .                        | 12        |
| 2.2      | Quellen der Variation . . . . .                       | 16        |
| 2.3      | Eingriffe in Prozesse und ihre Konsequenzen . . . . . | 23        |
| 2.4      | Qualitätsregelkarten . . . . .                        | 33        |
| 2.4.1    | Was ist eine Qualitätsregelkarte? . . . . .           | 33        |
| 2.4.2    | Die $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen . . . . .  | 35        |
| 2.4.3    | Die OC-Funktion und ARL . . . . .                     | 45        |
| 2.4.4    | Die $\bar{X}/R$ -Karte . . . . .                      | 49        |
| 2.4.4.1  | Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n > 1$ . . . . .          | 50        |
| 2.4.4.2  | Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n = 1$ . . . . .          | 56        |
| 2.4.4.3  | Die Bestimmung der Konstanten . . . . .               | 59        |
| 2.4.5    | Qualitätsregelkarten für Zählvariablen . . . . .      | 61        |
| 2.4.6    | Einige Fragen zu Qualitätsregelkarten . . . . .       | 63        |
| 2.4.7    | Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis . . . . .         | 66        |
| 2.4.7.1  | Die EWMA-Karte . . . . .                              | 67        |
| 2.5      | Prozessfähigkeitsanalyse . . . . .                    | 75        |
| 2.5.1    | $\mu$ und $T$ stimmen überein . . . . .               | 75        |
| 2.5.2    | $\mu$ und $T$ stimmen nicht überein . . . . .         | 83        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Faktorielle Versuchspläne</b>                                   | <b>87</b> |
| 3.1      | Versuchsplanung . . . . .  | 87        |
| 3.2      | Einfaktorielle Varianzanalyse . . . . .                            | 89        |
| 3.2.1    | Motivation . . . . .   | 89        |
| 3.2.2    | Das Modell . . . . .   | 91        |
| 3.2.3    | Schätzung der Parameter und Effekte . . . . .                      | 92        |
| 3.2.4    | Tests . . . . .  | 92        |
| 3.2.5    | Die ANOVA-Tabelle . . . . .  | 97        |
| 3.2.6    | Der Algorithmus von Yates . . . . .                                | 99        |
| 3.2.7    | Einfaktorielle Varianzanalyse in R . . . . .                       | 101       |
| 3.3      | Zweifaktorielle Varianzanalyse . . . . .                           | 108       |
| 3.3.1    | Das additive Modell . . . . .                                      | 108       |
| 3.3.1.1  | Das Modell . . . . .   | 108       |
| 3.3.1.2  | Schätzung der Parameter und Effekte . . . . .                      | 112       |
| 3.3.1.3  | Tests . . . . .  | 114       |
| 3.3.1.4  | Die ANOVA-Tabelle . . . . .  | 116       |
| 3.3.2    | Das nichtadditive Modell . . . . .                                 | 117       |
| 3.3.2.1  | Motivation . . . . .   | 117       |
| 3.3.2.2  | Das Modell . . . . .   | 118       |
| 3.3.2.3  | Schätzung der Parameter und Effekte . . . . .                      | 119       |
| 3.3.2.4  | Tests . . . . .  | 121       |
| 3.3.2.5  | Die ANOVA-Tabelle . . . . .  | 124       |
| 3.3.2.6  | Der Algorithmus von Yates . . . . .                                | 125       |
| 3.3.2.7  | Der Fall $n = 1$ . . . . .   | 130       |
| 3.3.3    | Zweifaktorielle Varianzanalyse in R . . . . .                      | 130       |
| 3.4      | $2^k$ -Pläne mit $k > 2$ . . . . .                                 | 132       |
| 3.4.1    | Das Modell . . . . .   | 132       |
| 3.4.2    | Die Effekte . . . . .  | 132       |
| 3.4.2.1  | Die Haupteffekte . . . . .   | 132       |
| 3.4.2.2  | Die Interaktionseffekte zwischen zwei Faktoren                     | 133       |
| 3.4.2.3  | Interaktionseffekte zwischen mehr als zwei Fak-<br>toren . . . . . | 134       |
| 3.4.3    | Ein Beispiel . . . . .   | 135       |
| 3.4.4    | Schätzen der Effekte . . . . .                                     | 135       |
| 3.4.5    | Der Algorithmus von Yates . . . . .                                | 138       |
| 3.4.6    | Tests . . . . .  | 139       |
| 3.4.7    | Der Fall $n = 1$ . . . . .   | 142       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.4.8    | $2^k$ -Pläne in R . . . . .  | 153        |
| 3.5      | Fraktionelle faktorielle Versuchspläne . . . . .                                   | 162        |
| <b>A</b> | <b>Beweise und Herleitungen</b>  | <b>168</b> |
| A.1      | Varianzen und Kovarianzen . . . . .  | 168        |
| A.2      | Der Beweis von Gleichung (2.81) auf Seite 70 . . . . .                             | 170        |
| A.3      | Der Beweis von Gleichung (2.82) auf Seite 70 . . . . .                             | 171        |
| A.4      | Die geometrische Folge . . . . .   | 172        |
| A.5      | Herleitung des Schätzers von $\mu$ in Gleichung (3.2) . . . . .                    | 173        |
| A.6      | Herleitung der Schätzer von $\mu_1$ und $\mu_2$ in Gleichung (3.5) . . . . .       | 174        |
| A.7      | Der Beweis von Gleichung (3.13) auf Seite 94 . . . . .                             | 175        |
| A.8      | Der Beweis von Gleichung (3.15) auf Seite 94 . . . . .                             | 176        |
| A.9      | Der Beweis von Gleichung (3.17) auf Seite 99 . . . . .                             | 176        |
| A.10     | Die Schätzer in Gleichung (3.18) auf Seite 109 sind nicht ein-<br>deutig . . . . . | 177        |
| A.11     | Der Beweis von Gleichung (3.31) auf Seite 114 . . . . .                            | 178        |
| A.12     | Der Beweis von Gleichung (3.51) auf Seite 122 . . . . .                            | 178        |
| A.13     | Der Beweis von Gleichung (3.52) auf Seite 126 . . . . .                            | 179        |
| <b>B</b> | <b>Tabellen</b>  | <b>180</b> |

# Kapitel 1

## Allgemeines zum Begriff Qualität

### 1.1 Historische Entwicklung

1. Qualität durch Beurteilung von Warenposten durch Stichprobenprüfungen im Mittelalter
2. Produktherstellung und Prüfung in Handwerksbetrieben fielen zusammen. Das Training erfolgte durch Lehr- und Wanderjahre
3. Qualitätskontrolle von Produkten durch Experten im Sinne einer Ergebnisprüfung im Industriezeitalter, da Produktionsabläufe automatisiert sind.

Qualitätssicherung ist rein technische Funktion

4. In den 1920er Jahren Qualitätsregelkarten durch Shewhart, um den Produktionsprozess zu kontrollieren.

*Do it right the first time*

Außerdem: Stichprobenprüfungen in der Annahmekontrolle, die statistisch begründet sind.

5. Mitarbeiterorientierte Maßnahmen der Qualitätsförderung (Mitarbeitermotivationsprogramme). Wiederentdeckung des Menschen als relevante Größe.

6. Umfassende Qualitätsstrategien. Total Quality Konzepte.

Demings Schwerpunkt liegt auf statistischen Methoden.

Juran ergänzt diesen Ansatz durch kundenorientierten Qualitätsbegriff (*fitness for use*)

## 1.2 Was ist Qualität?

Garvins zählt fünf Ansätze zur Definition von Qualität auf, die bei Oess (1994) zu finden sind.

### 1. transzendenter Ansatz

Qualität ist etwas Einzigartiges und Absolutes. Sie ist Zeichen für kompromisslose Standards und extrem hohe Anforderungen, die quasi zeitlos sind.

### 2. produktbezogener Ansatz

Qualitätsunterschiede spiegeln sich in Differenzen von Eigenschaften wider, die für ein Produkt charakteristisch sind.

### 3. anwenderbezogener Ansatz

Qualität liegt in den Augen des Betrachters. Die Produkte haben die höchste Qualität, die am besten die Bedürfnisse des Verbrauchers erfüllen. Subjektive Beurteilung des Kunden hängt ab von

- (a) dem Anforderungsprofil des Kunden und dem von ihm vorgesehenen Verwendungszweck des Produktes bzw. der Dienstleistung (*fitness for use*)
- (b) den vom Kunden als kaufentscheidend angesehenen Faktoren (*selektive Qualitätsbeurteilung*)
- (c) dem vom Kunden angestellten Vergleich mit Wettbewerbsangeboten (*relative Qualität*)

### 4. fertigungsbezogener Ansatz

Es sollen Spezifikationen eingehalten werden. Forderung: *do it right the first time*. Qualität ist Erfüllung von Anforderungen. Das Deutsche Institut für Normung (DIN) hat zusammen mit der Deutschen Gesellschaft für Qualität (DGQ) folgende Definition geschaffen:

*Qualität ist Beschaffenheit einer Einheit bezüglich ihrer Eignung, festgelegte und vorausgesetzte Erfordernisse zu erfüllen.*

### 5. wertbezogener Ansatz

Qualität wird mit Hilfe von Kosten und Preisen definiert. Ein Erzeugnis ist ein Qualitätsprodukt, weil es eine bestimmte Leistung zu einem akzeptablen Preis bietet.

## 1.3 Qualitätsmerkmale

- **Gebrauchstauglichkeit**

Ist das Produkt für seinen Verwendungszweck geeignet?  
(produkt- und anwenderbezogen)

- **Zuverlässigkeit**

Wie oft fällt das Produkt aus?  
(fertigungsbezogen)

- **Haltbarkeit**

Wie groß ist die Lebensdauer des Produktes?  
(produktbezogen)

- **Servicefreundlichkeit**

Wie leicht kann das Produkt repariert werden?  
(produktbezogen)

- **Design**

Wie sieht das Produkt aus?  
(anwenderbezogen)

- **Ausstattung**

Welche Merkmale besitzt das Produkt?  
(produktbezogen)

- **Subjektive Qualität**

Wie ist das Image eines Unternehmens oder eines Produktes?  
(anwenderbezogen)

- **Anforderungserfüllung**

Sind die vorgegebenen technischen Anforderungen oder Spezifikationen eingehalten worden?  
(fertigungsbezogen)

- **Funktionsfähigkeit**

(produktbezogen)



- **Umweltfreundlichkeit**  
(produktbezogen)
- **Sicherheit**  
(anwenderbezogen)
- **Güte**  
fertigungsbezogen

Quelle: Oess (1994) und Montgomery (2008)

## 1.4 Die "Gurus"

- Deming  
Kernthesen in einem 14-Punkte-Programm, das sich an die Unternehmensleitung wendet, mit dem Ziel der Verbesserung von Qualität und Produktivität. Grundlage ist eine eindeutig formulierte Unternehmenspolitik mit dem Ziel einer kontinuierlichen Verbesserung von Produkten und Dienstleistungen.
  - Qualität kann nicht ergebnisbezogen geprüft werden.
  - Der Prozess und damit zusammenhängende statistische Verfahren der Prozesssteuerung und -regelung sind wichtig.
  - Statistisches Fachwissen sollte dezentralisiert werden.
- Juran  
Kundenorientierter Qualitätsbegriff ("fitness for use").  
Unter Qualität ist also nicht der Aufwand des Herstellers, sondern die Gebrauchstauglichkeit in den Augen des Kunden zu sehen.  
Qualitätsanforderungen bzw. qualitätsrelevante Maßnahmen müssen in jeder Phase der Erstellung von Produkten und Dienstleistungen zum Tragen kommen.  
Besondere Bedeutung von vorbeugenden Maßnahmen.
- Feigenbaum  
Die Erwartungen des Verbrauchers bestimmen die Qualität.  
Für Qualität ist jeder verantwortlich, vom Top Management bis zur Basis.

Qualität wird sowohl in Funktionen wie Marketing, Entwicklung, Konstruktion und Einkauf als auch in der Fertigung generiert.

- Crosby

Qualität wird als Übereinstimmung mit Anforderungen definiert.

Das Grundprinzip der Qualität ist Vorbeugung.

Null Fehler müssen Standard werden.

Maßstab für Qualität sind die Kosten der Nichterfüllung von Anforderungen.

Quelle: Oess (1994)

## 1.5 Demings 14 Punkte

1. Unverrückbares Unternehmensziel  
Schaffe ein feststehendes Unternehmensziel in Richtung ständiger Verbesserung von Produkten.
2. Der neue Denkansatz  
Um wirtschaftliche Stabilität sicherzustellen, ist ein neuer Denkansatz notwendig. Wir befinden uns in einer neuen Wirtschaftsära.
3. Keine Sortierprüfung mehr  
Beende die Notwendigkeit und Abhängigkeit von Vollkontrollen, um Qualität zu erreichen.
4. Nicht unbedingt das niedrigste Angebot berücksichtigen  
Beende die Praxis, nur das niedrigste Angebot zu berücksichtigen.
5. Verbessere ständig die Systeme  
Suche ständig nach Fehlerursachen, um alle Systeme für Produktion und Dienstleistungen sowie alle anderen im Unternehmen vorkommenden Tätigkeiten auf Dauer zu verbessern.
6. Schaffe moderne Anlernmethoden  
Schaffe moderne Trainingsmethoden und Sorge für Wiederholtraining am Arbeitsplatz.
7. Sorge für richtiges Führungsverhalten  
Schaffe moderne Führungsmethoden, die sich darauf konzentrieren, dem Menschen zu helfen, seine Arbeit besser zu verrichten.
8. Beseitige die Atmosphäre der Angst  
Fördere gegenseitige Kommunikation und andere Mittel, um die Angst innerhalb des gesamten Unternehmens zu beseitigen.
9. Beseitige Barrieren  
Beseitige die Grenzen zwischen den Bereichen.
10. Vermeide Ermahnungen  
Beseitige Slogans, Aufrufe und Ermahnungen.

11. Setze keine festgeschriebenen Ziele  
Beseitige Leistungsvorgaben, die zu erreichende Ziele willkürlich fest-schreiben.
12. Gestatte es, auf gute Arbeit stolz zu sein  
Beseitige alles, was das Recht jedes Mitarbeiters und Managers in Frage stellt, auf ihre Arbeit stolz zu sein.
13. Fördere die Ausbildung  
Schaffe ein durchgreifendes Ausbildungsprogramm und eine Atmosphä-re der Selbstverbesserung für jeden einzelnen.
14. Verpflichtung der Unternehmensleitung  
Mache die ständige Verbesserung von Qualität und Produktivität zur Aufgabe der Unternehmensleitung.

Quelle: Kirstein (1994)

## 1.6 Charakteristika von SQM

- konsequente Anwendung statistischer Methoden
- Übergang von ergebnis- zu verstärkt präventivorientierten Maßnahmen
- Qualität als unternehmensweite Aufgabe
- Reintegration der Qualitätsverantwortung in die Linie
- Schaffung der personellen, technischen und organisatorischen Voraussetzungen, die jedem Mitarbeiter die Mitwirkung an der gemeinsamen Aufgabe "Qualität" ermöglichen
- Durchsetzung umfassender Schulungsprogramme
- verstärkte Kundenorientierung

# Kapitel 2

## Prozesse

### 2.1 Was ist ein Prozess?

Wir werden uns im Folgenden mit statistischer Prozesskontrolle beschäftigen. In DIN EN ISO 8402 wird ein Prozess definiert als

Ein Satz von in Wechselbeziehungen stehenden Mitteln und Tätigkeiten, die Eingaben in Ergebnisse umgestalten.

Nach ISO 8402 ist ein Prozess also durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

- Ein Prozess erhält Eingaben.
- Es gibt eine Menge von Mitteln und Tätigkeiten.
- Diese Mittel und Tätigkeiten stehen in Wechselbeziehungen.
- Ein Prozess liefert Ergebnisse.

#### **Beispiel 1**

Das Backen einer Berliner Schrippe ist ein Prozess. Ein Rezept ist unter

<http://www.chefkoch.de/rezepte/126201054028080,66/Berliner-Schrippen.html>

zu finden:

#### **Zutaten für 30 Portionen**

900 g Mehl (Weizenmehl Type 550)

100 g Mehl (Weizenmehl Type 1050)

5 g Zucker

100 g Fett (Margarine)  
 50 g Hefe  
 20 g Salz  
 560 g Wasser, kalt

### Zubereitung

Mehl sieben und mischen, Hefe in Wasser auflösen, restliche Zutaten hinzufügen und zu einem mittelfesten Teig kneten. Teig 2x20 Min. ruhen lassen. Ca. 30 Stücke abstechen, längliche Brötchen formen. Bei 3/4 Gare<sup>1</sup> (nicht ganz aufgegangen!) mit einem scharfen Messer längs einschneiden in den auf 240 Grad vorgeheizten Ofen schieben. Backzeit 18-20 Min. Beim Einschieben eine Tasse Wasser auf die Platte im Backofen schütten.

Die Eingaben dieses Prozesses sind die Zutaten, das Ergebnis ist die Berliner Schrippe. Als Mittel wird explizit der Backofen genannt. Zu den Tätigkeiten gehört das Sieben, Mischen und Kneten.

Wir bezeichnen im Folgenden die Eingaben des Prozesses als Input und das Ergebnis als Output.

Die folgende Abbildung veranschaulicht einen Prozess.



Auf den ersten Blick deckt die obige Definition nicht alles ab, was wir unter einem Prozess verstehen. So bezeichnen wir auch den Transport eines Gutes oder einer Person von einem Ort A zu einem Ort B als Prozess. Die folgende Definition der DGQ berücksichtigt diesen Tatbestand.

<sup>1</sup>Die knappe Gare oder auch 3/4-Gare beschreibt einen bestimmten Zustand während des Gärprozesses eines Hefeteigs. Der Begriff 3/4-Gare deutet darauf hin, dass der Teig noch nicht seine volle Gare erreicht hat (<http://www.lebensmittellexikon.de>)

Ein Prozess ist die Gesamtheit von in Wechselbeziehungen stehenden Abläufen, Vorgängen und Tätigkeiten, durch welche Werkstoffe, Energien oder Informationen transportiert oder umgeformt werden.

(DGQ 11-04, S. 14, Nr. 1.1.1)

### Beispiel 2

Ein Arbeitnehmer fährt jeden Morgen um die gleiche Zeit mit dem Auto von seinem Wohnort zur Arbeit.

Als Statistiker sind wir an Charakteristika des Outputs des Prozesses interessiert. Es werden Merkmale erhoben, die qualitativ oder quantitativ sind.

### Beispiel 1 (fortgesetzt)

Den Bäcker und die Kunden interessiert das Gewicht und der Geschmack des Brötchens. Das Gewicht ist ein quantitatives Merkmal und der Geschmack ein qualitatives Merkmal mit ordinalem Messniveau.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Den Arbeitnehmer interessiert die Fahrzeit. Die Fahrzeit ist ein quantitatives Merkmal.

Statistiker beschäftigen sich mit Prozessen, die mehrmals beobachtet werden können. Wird zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots$  die Ausprägung des Merkmals bestimmt, so erhält man eine Folge von Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$

### Beispiel 1 (fortgesetzt)

Nach jedem Backvorgang bestimmt der Bäcker das Gewicht eines der Brötchen. Er erhält nach 20 Backvorgängen folgende Werte:

68 73 72 74 68 69 70 71 68 68 68 69 67 69 69 68 66 71 72 68

Es gilt zum Beispiel  $x_1 = 68$  und  $x_8 = 71$ .

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Die Folge der Beobachtungen stellt man in einem **Run-Chart** grafisch dar. Bei diesem werden die Merkmalswerte  $x_t$  gegen die Zeit  $t$  gezeichnet. Außerdem werden aufeinander folgende Punkte durch Geraden verbunden.

**Beispiel 1 (fortgesetzt)**

Abbildung 2.1 zeigt den Run-Chart des Gewichts der Brötchen.

Abbildung 2.1: Gewicht von Brötchen

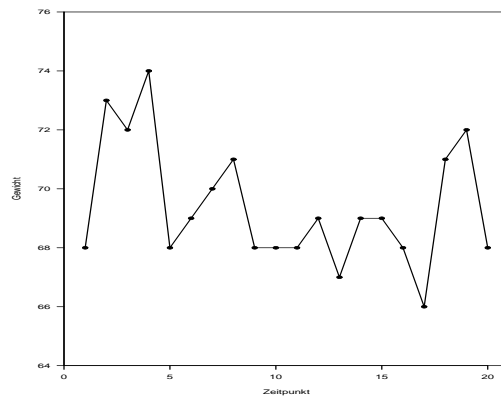
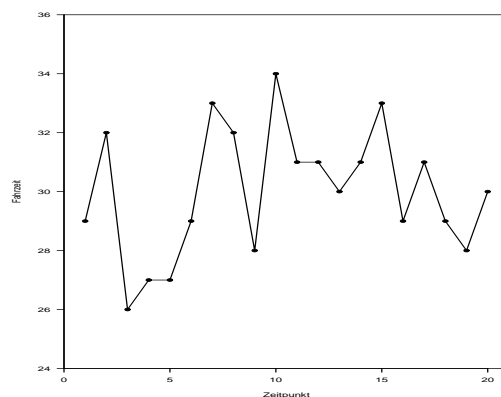
**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Abbildung 2.2 zeigt den Run-Chart der Fahrzeit des Arbeitnehmers.

Abbildung 2.2: Fahrzeit des Arbeitnehmers



In beiden Beispielen ist es so, dass der Output des Prozesses hinsichtlich der interessierenden Merkmale nicht konstant ist. Die Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$  sind also Realisationen der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ . Erfüllt die Folge  $X_1, X_2, \dots$  bestimmte Annahmen, so zeigt sie stabiles Verhalten und kann prognostiziert werden.



## 2.2 Quellen der Variation

Kann das Verhalten eines Prozesses in einem gewissen Rahmen prognostiziert werden, so spricht man davon, dass der Prozess unter statistischer Kontrolle ist. Dabei stellen sich zwei Fragen:

1. Wann ist ein Prozess unter statistischer Kontrolle?
2. Woran erkennt man, dass ein Prozess nicht mehr unter statistischer Kontrolle ist?

Mit Frage 1 werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Der Output eines Prozesses ist nicht konstant, da es eine Reihe von Größen gibt, die variieren und einen Einfluss auf den Prozess haben. Diese Größen kann man im Gegensatz zum Input nicht kontrollieren.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Fahrzeit des Arbeitnehmers hängt von vielen Faktoren ab. So wird an einem Tag eine Ampel auf der Strecke rot sein. Dies führt zu einer Verlängerung der Fahrzeit gegenüber einem Tag, an dem die Ampel grün ist. An manchen Tagen muss er an einer Vorfahrtstraße warten, an anderen hingegen nicht. Auf der Strecke gibt es auf einmal eine Baustelle.

Man kann zwei Typen von Einflussgrößen unterscheiden. Es gibt

- **zufällige Ursachen der Variabilität** (chance causes of variation, common cause)
- **systematische Ursachen der Variabilität** (assignable causes of variation, special cause)

Man nennt die systematischen Ursachen auch nachweisbare Ursachen.

Bissell (1994) zählt auf Seite 102 Charakteristika zufälliger Ursachen und systematischer Ursachen der Variabilität auf. Für zufällige Ursachen der Variabilität gilt:

- Es gibt viele kleine Einflüsse.
- Diese sind oft nicht individuell identifizierbar.
- Es gibt ein stabiles Gesamtniveau an Streuung.
- Gesamteffekte sind vorhersehbar.
- Ein beträchtlicher Aufwand ist nötig, um die Variation zu reduzieren.

- Sie werden als Ausgangspunkt zur Identifizierung nachweisbarer Ursachen genommen.

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Die Ampel und die Vorfahrtstraße sind zufällige Quellen der Variation.

Die zufälligen Quellen der Variation haben zur Folge, dass das Ergebnis des Prozesses nicht konstant ist. Sie bewirken aber, dass das Gesamtniveau an Streuung stabil ist und dass Gesamteffekte vorhersehbar sind. Dies bedeutet, dass das Niveau und die Variabilität des Outputs konstant ist.

Wir bezeichnen die zufälligen Quellen der Variation im Zeitpunkt  $t$  mit  $\epsilon_t$ . Da die zufälligen Quellen der Variation keinen systematischen Einfluss haben, gilt für  $t = 1, 2, \dots$

$$E(\epsilon_t) = 0 \quad (2.1)$$

Da wir annehmen, dass das Gesamtniveau an Streuung stabil ist, gilt  $t = 1, 2, \dots$

$$Var(\epsilon_t) = \sigma^2 \quad (2.2)$$

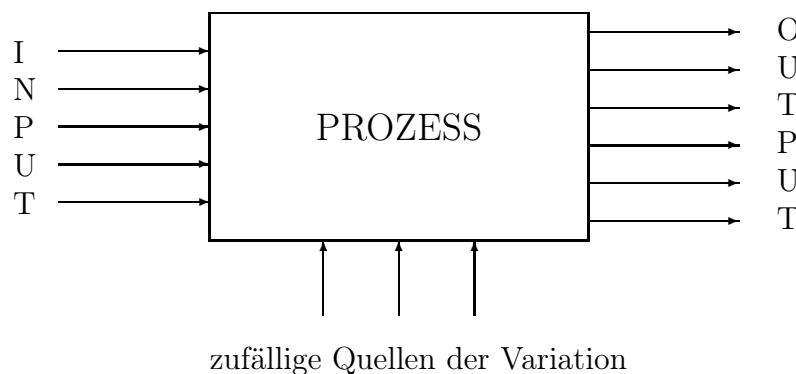
Außerdem nehmen wir noch an, dass die zufälligen Einflüsse unterschiedlicher Zeitpunkte unkorreliert sind. Für  $s \neq t$  gilt also:

$$Cov(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0 \quad (2.3)$$

Mit  $\epsilon_t$  können wir  $X_t$  folgendermaßen darstellen:

$$X_t = \mu + \epsilon_t \quad (2.4)$$

Die folgende Abbildung zeigt, dass bei einem Prozess, der unter statistischer Kontrolle ist, nur zufällige Ursachen der Variation vorhanden sind.



Die Zufallsvariable  $X_t$  setzt sich also additiv zusammen aus einem systematischen Term  $\mu$ , der gleich dem Niveau des Outputs ist, und einem stochastischen Term  $\epsilon_t$ , der bewirkt, dass der Output streut. Diese Streuung ist aber konstant, sodass man weiß, in welchem Bereich die Realisationen des Prozesses liegen.

Unter den Annahmen (2.1), (2.2) und (2.3) gilt dann für  $X_t$ :

$$E(X_t) = \mu \tag{2.5}$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \tag{2.6}$$

und

$$Cov(X_s, X_t) = 0 \tag{2.7}$$

Gleichung (2.5) ist wegen

$$E(X_t) \stackrel{(2.4)}{=} E(\mu + \epsilon_t) = \mu + E(\epsilon_t) = \mu$$

und Gleichung (2.6) wegen

$$Var(X_t) \stackrel{(2.4)}{=} Var(\mu + \epsilon_t) \stackrel{(A.6)}{=} Var(\epsilon_t) = \sigma^2$$

erfüllt. Die Herleitung von Gleichung (A.6) ist auf Seite 168 zu finden.

Mit Gleichung (A.3) auf Seite 168 sieht man die Gültigkeit von Gleichung (2.7) folgendermaßen:

$$Cov(X_s, X_t) \stackrel{(A.3)}{=} Cov(\mu + \epsilon_s, \mu + \epsilon_t) = Cov(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0$$

Die Abbildungen 2.1 und 2.2 auf Seite 15 zeigen stabile Prozesse.

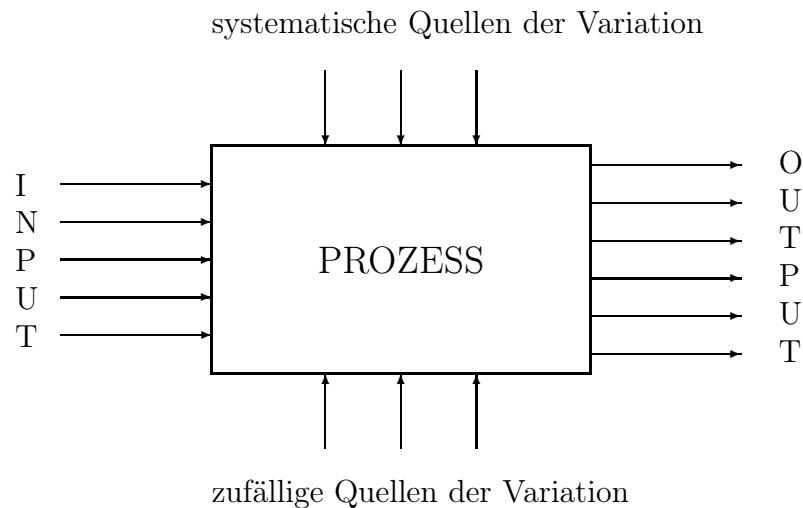
Ein Prozess ist nicht unter statistischer Kontrolle, wenn systematische Quellen der Variation auf ihn wirken. Bissell (1994) zählt auf Seite 105 Charakteristika nachweisbarer Ursachen der Variabilität auf.

- Es gibt einige wenige Einflüsse.
- Diese sind irregulär im Auftreten.
- Sie sind oft unvorhersehbar in der Wirkung.
- Sie werden durch kleine Eingriffe behoben.
- Sie fallen durch Qualitätsregelkarten auf.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Baustelle ist eine systematische Quelle der Variation. Sie verändert das Niveau des Prozesses.

Die folgende Abbildung verdeutlicht, dass bei einem Prozess, der nicht unter statistischer Kontrolle ist, neben zufälligen Quellen der Variabilität auch systematische Quellen der Variation aktiv sind.



Systematische Quellen der Variation bewirken, dass sich das Niveau oder die Variabilität des Prozesses ändern.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Baustelle wird zur Folge haben, dass sich die mittlere Fahrzeit verlängert. Sie kann auch bewirken, dass die Streuung der Fahrzeit größer wird.

Abbildung 2.3 zeigt einen Prozess, dessen Lage ab dem Zeitpunkt 11 größer wurde.

Abbildung 2.3: Prozess mit Lageverschiebung

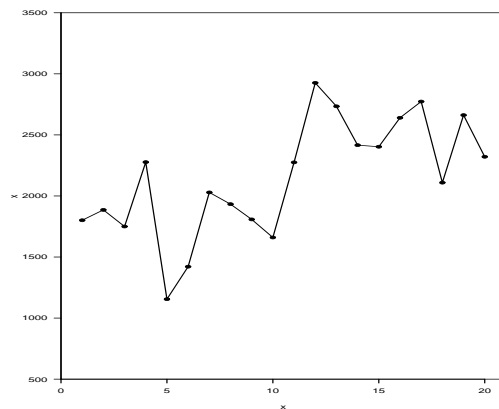
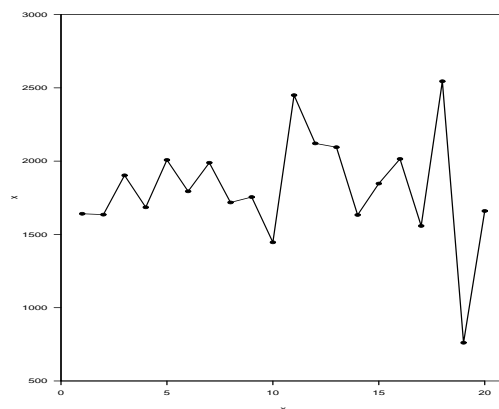


Abbildung 2.4 zeigt einen Prozess, dessen Streuung ab dem Zeitpunkt 11 größer wurde.

Abbildung 2.4: Prozess mit Vergrößerung der Streuung



Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, kann eine systematische Quelle der Variation auch zur Folge haben, dass ein Prozess Autokorrelation aufweist.

Schauen wir uns ein Beispiel für einen Prozess mit Autokorrelation an.

**Beispiel 3**

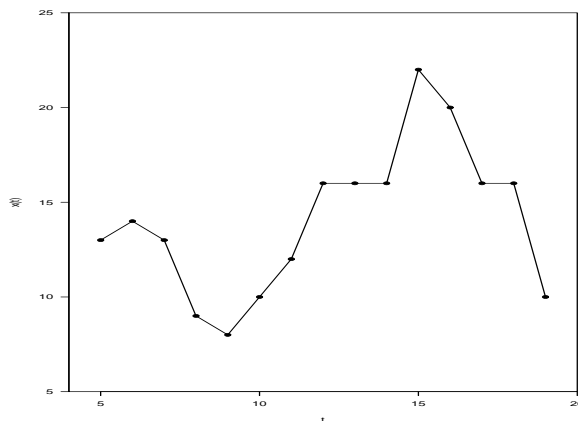
Wir betrachten die Höchsttemperatur in Münster vom 5.4.2005 bis zum 19.4.2005.

Tabelle 2.1: Höchsttemperatur in Münster vom 5.4.2005 bis zum 19.4.2005

|            |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Tag        | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Temperatur | 13 | 14 | 13 | 9 | 8 | 10 | 12 | 16 | 16 | 16 | 22 | 20 | 16 | 16 | 10 |

Abbildung 2.5 zeigt die Zeitreihe.

Abbildung 2.5: Höchsttemperatur in Münster vom 1.5.2003 bis zum 10.5.2004



Die Abbildung deutet auf Abhängigkeit zwischen benachbarten Werten hin: auf warme Tage folgen eher warme Tage und auf kalte Tage eher kalte Tage.

Um zu überprüfen, ob in einer Zeitreihe  $x_1, x_2, \dots$  benachbarte Beobachtungen  $x_{t-1}$  und  $x_t$  abhängig sind, schauen wir uns die Paare  $(x_{t-1}, x_t)$  an.

**Beispiel 3 (fortgesetzt)**

Bei einer Zeitreihe der Länge 15 erhält man 14 Paare. So bilden die Beobachtungen  $x_1 = 13$  und  $x_2 = 14$  das erste Paar. Hier sind alle Paare.

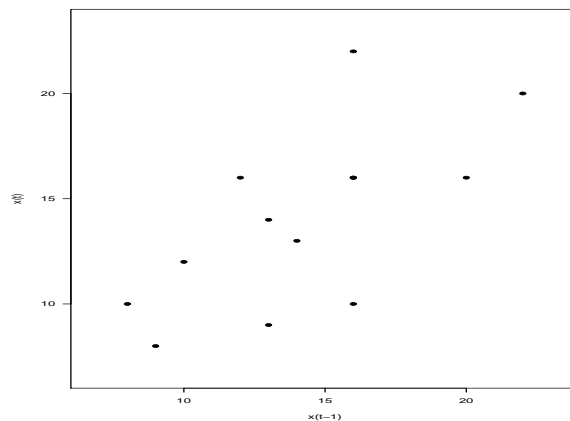
- (13, 14) (14, 13) (13, 9) (9, 8) (8, 10) (10, 12) (12, 16)  
 (16, 16) (16, 16) (16, 22) (22, 20) (20, 16) (16, 16) (16, 10)

Bevor man eine Maßzahl für den Zusammenhang zwischen  $x_{t-1}$  und  $x_t$  bestimmt, sollte man sich das Streudiagramm von  $x_t$  gegen  $x_{t-1}$  anschauen.

**Beispiel 3 (fortgesetzt)**

In Abbildung 2.6 ist das Streudiagramm von  $x_t$  gegen  $x_{t-1}$  zu finden.

Abbildung 2.6: Streudiagramm von  $x_t$  gegen  $x_{t-1}$



Wir sehen, dass die beiden Merkmale miteinander positiv korreliert sind.

Liegen die Punktepaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  vor, so ist die empirische Kovarianz

$$s_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.8)$$

eine Maßzahl für den linearen Zusammenhang zwischen den  $x_i$  und  $y_i$ . Ersetzen wir  $x_i$  durch  $x_{t-1}$  und  $y_i$  durch  $x_t$ , so erhalten wir die Autokovarianz  $c_1$  zum Lag 1.

**Beispiel 3 (fortgesetzt)**

Es gilt mit  $\bar{x} = 14.36$  und  $\bar{y} = 14.14$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{14} [(13 - 14.36)(14 - 14.14) + (14 - 14.36)(13 - 14.14) + \\ &\quad \dots + (16 - 14.36)(10 - 14.14)] \\ &= 10.94 \end{aligned}$$

Die empirische Kovarianz ist nicht normiert und daher nur schwer mit Kovarianz-Werten von verschiedenen Prozessen zu vergleichen. Dividieren wir sie durch das Produkt der Standardabweichungen der beiden Merkmale, so erhalten wir den Korrelationskoeffizienten, der Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt. Entsprechend erhalten wir den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1.

**Beispiel 3 (fortgesetzt)**

Es gilt  $r_1 = 0.68$ .

Analog zum Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1 kann man die Korrelation zwischen Beobachtungen betrachten, die nicht benachbart sind. Betrachtet man die Korrelation zwischen  $x_{t-2}$  und  $x_t$ , so erhält man den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 2.

**Beispiel 3 (fortgesetzt)**

Es gilt  $r_2 = 0.38$ .

## 2.3 Eingriffe in Prozesse und ihre Konsequenzen

Wir gehen aus von einem Prozess  $X_1, X_2, \dots$  aus, der unter statistischer Kontrolle ist. Für  $t = 1, 2, \dots$  gilt also

$$E(X_t) = \mu \quad (2.9)$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \quad (2.10)$$

$$Cov(X_s, X_t) = 0 \quad \text{für } s \neq t, \quad (2.11)$$

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Wir schauen uns noch einmal die Fahrzeiten des Arbeitnehmers an:

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

In der Regel hat man eine Vorstellung von dem Wert, den das interessierende Merkmal annehmen sollte. Wir bezeichnen diesen als Zielwert  $z_0$  und gehen davon aus, dass der Zielwert  $z_0$  mit dem Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses zusammenfällt. Es gilt also

$$E(X_t) = \mu = z_0 \quad (2.12)$$

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer will um 8 Uhr 30 am Arbeitsplatz sein. Er weiß aus Erfahrung, dass er im Mittel 30 Minuten von seiner Wohnung zum Arbeitsplatz



benötigt. Er fährt deshalb um 8 Uhr von zu Hause los. Der Arbeitnehmer hat das Ziel, um 8 Uhr 30 in der Firma anzukommen. Wir verzichten im Folgenden auf die Angabe der Stunde und sprechen nur vom Zielwert 30. Kommt er also um 8 Uhr 34 an, so schreiben wir 34. Dies ist dann der beobachtete Wert des Prozesses. Da er jeden Tag um 8 Uhr losfährt, sind die obigen Zahlen die beobachteten Werte des Prozesses.

Wir wollen untersuchen, welche Konsequenzen es hat, wenn man in einen Prozess eingreift. Dabei betrachten wir zwei Arten von Eingriffen, die von Deming (1986) und Krehbiel (1994) näher untersucht wurden. Man spricht vom **Eingriff mit unendlichem Gedächtnis** und vom **Eingriff ohne Gedächtnis**. In der Regel ändern sich die Werte des Prozesses durch den Eingriff. Wir bezeichnen die Werte des Prozesses, die sich nach dem Eingriff ergeben, mit  $E_t$ .

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer orientiert sich bei seinem Eingriff an der Ankunftszeit. Schauen wir uns dies für die ersten beiden Tage an. Er fährt am ersten Tag um 8 Uhr los und kommt um 8 Uhr 29 an. Er stellt fest, dass er eine Minute zu früh angekommen ist. Daraus zieht er die Konsequenz, dass er am nächsten Tag 1 Minute später losfährt. Er fährt am zweiten Tag also um 8 Uhr 1 los. Da er an diesem zweiten Tag 32 Minuten unterwegs ist, kommt er um 8 Uhr 33 an. Also gilt  $E_2 = 33$ . Hätte er nicht in den Prozess eingegriffen, so hätte er den Wert  $X_2 = 32$  beobachtet, denn er wäre ja um 8 Uhr losgefahren.

Nun kommen wir zum dritten Tag. Er orientiert sich weiterhin an der Ankunftszeit und stellt fest, dass er 3 Minuten zu spät angekommen ist. Also muss er 3 Minuten früher losfahren. Nun stellt sich aber die Frage, auf welche Zeit sich diese 3 Minuten beziehen. Es kommen 8 Uhr und 8 Uhr 1 in Frage. Wählt er 8 Uhr, so vergisst er, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist, und wählt seine normale Abfahrtszeit 8 Uhr. Man spricht vom **Eingriff ohne Gedächtnis**. Diesen schauen wir uns weiter unten genauer an.

Wählt er hingegen 8 Uhr 1, so erinnert er sich, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist. Man spricht vom **Eingriff mit unendlichem Gedächtnis**. Schauen wir uns an, wie sich bei diesem die Werte entwickeln.

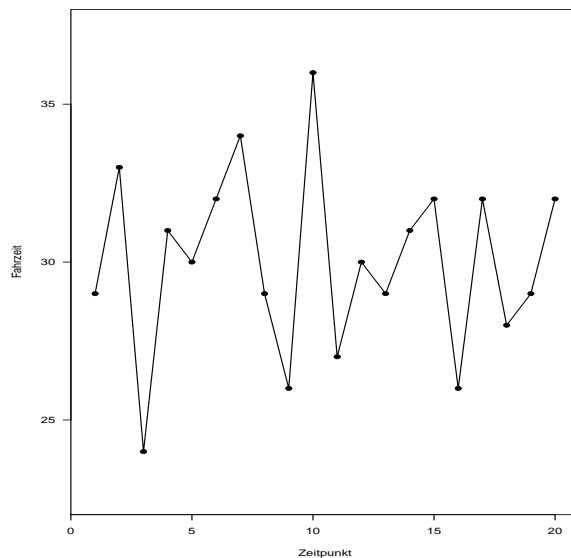
Am dritten Tag muss er also 3 Minuten früher losfahren und erinnert sich, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist. Also fährt er um 7 Uhr 58 los und kommt um 8 Uhr 24 an, da seine Fahrzeit 26 Minuten beträgt. Nach dem Eingriff gilt  $E_3 = 24$ , während ohne Eingriff  $X_3 = 26$  gilt.

Wenden wir diese Vorgehensweise auf alle Beobachtungen an, so erhalten wir nachstehende Folge:

29 33 24 31 30 32 34 29 26 36 27 30 29 31 32 26 32 28 29 32

Abbildung 2.7 zeigt den resultierenden Prozess.

Abbildung 2.7: Prozess nach Eingriff mit unendlichem Gedächtnis



Für  $E_t$  ergibt sich folgende Abhängigkeit von  $X_{t-1}$ ,  $X_t$  und  $z_0$ .  
Offensichtlich ist  $E_1 = X_1$  und für  $t > 1$  gilt

$$E_t = X_t + z_0 - X_{t-1} \quad (2.13)$$

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Mit  $X_1 = 29$  folgt  $E_1 = 29$ .

Mit  $X_1 = 29$ ,  $X_2 = 32$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_2 = 32 + 30 - 29 = 33$$

Mit  $X_2 = 32$ ,  $X_3 = 26$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_3 = 26 + 30 - 32 = 24$$

Es stellt sich die Frage, ob der Eingriff die Struktur des Prozesses verändert. Schauen wir uns dies zunächst für das Beispiel an.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Für den ursprünglichen Prozess gilt

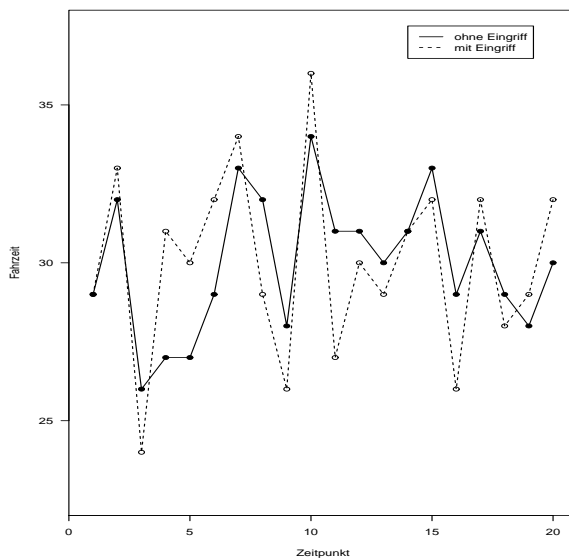
$$\bar{x} = 30 \quad s^2 = 4.84 \quad r_1 = 0.109$$

Nach dem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis erhalten wir folgende Werte

$$\bar{e} = 30 \quad s^2 = 8.63 \quad r_1 = -0.49$$

Das Niveau des Prozesses hat sich nicht geändert, während die Varianz sich fast verdoppelt hat. Der ursprüngliche Prozess wies nahezu keine Autokorrelation zum Lag 1 auf ( $r_1 = 0.109$ ), während der Autokorrelationskoeffizient nach dem Eingriff den Wert  $-0.49$  aufweist. Abbildung 2.8 mit beiden Prozessen bestätigt dies.

Abbildung 2.8: Prozess ohne Eingriff und nach Eingriff mit unendlichem Gedächtnis



Schauen wir uns jetzt den Erwartungswert, die Varianz und den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1 an.

Es gilt

$$E(E_t) = \mu. \quad (2.14)$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$E(E_t) = E(X_t + z_0 - X_{t-1}) = E(X_t) + z_0 - E(X_{t-1}) \stackrel{(2.9)}{=} \mu + z_0 - \mu = z_0.$$

Da wir unterstellen, dass der Prozess unter Kontrolle ist, gilt  $z_0 = \mu$ . Also ändert sich das Niveau des Prozesses durch den Eingriff nicht.

Weiterhin gilt

$$\text{Var}(E_t) = 2\sigma^2. \quad (2.15)$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(E_t) &= \text{Var}(X_t + z_0 - X_{t-1}) \\ &\stackrel{(A.6)}{=} \text{Var}(X_t - X_{t-1}) \\ &\stackrel{(A.7)}{=} \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_{t-1}) - 2\text{Cov}(X_{t-1}, X_t) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_{t-1}) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Es gilt noch

$$\text{Cov}(E_{t-1}, E_t) = -\sigma^2. \quad (2.16)$$

Um diese Beziehung zeigen zu können, benötigen wir einige Eigenschaften der Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$ , die im Anhang zu finden sind. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(E_{t-1}, E_t) &= \text{Cov}(X_{t-1} + z_0 - X_{t-2}, X_t + z_0 - X_{t-1}) \\ &\stackrel{(A.3)}{=} \text{Cov}(X_{t-1} - X_{t-2}, X_t - X_{t-1}) \\ &\stackrel{(A.5)}{=} \text{Cov}(X_{t-1}, X_t - X_{t-1}) + \text{Cov}(-X_{t-2}, X_t - X_{t-1}) \\ &\stackrel{(A.2)}{=} \text{Cov}(X_t - X_{t-1}, X_{t-1}) + \text{Cov}(X_t - X_{t-1}, -X_{t-2}) \\ &\stackrel{(A.5)}{=} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) + \text{Cov}(-X_{t-1}, X_{t-1}) \\ &\quad + \text{Cov}(X_t, -X_{t-2}) + \text{Cov}(-X_{t-1}, -X_{t-2}) \\ &\stackrel{(A.4)}{=} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) - \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) \\ &\quad + -\text{Cov}(X_t, X_{t-2}) + \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} -\text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) \stackrel{(A.1)}{=} -\text{Var}(X_{t-1}) \stackrel{(2.10)}{=} -\sigma^2 \end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_1$  zum Lag 1 ist der Korrelationskoeffizient zwischen  $E_{t-1}$  und  $E_t$ . Für diesen gilt

$$\rho_1 = \frac{\text{Cov}(E_{t-1}, E_t)}{\sqrt{\text{Var}(E_{t-1}) \text{Var}(E_t)}} = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 2\sigma^2}} = -0.5$$

Der Eingriff mit unendlichem Gedächtnis hat keinen Einfluss auf das Niveau des Prozesses. Die Varianz des Prozesses verdoppelt sich aber. Außerdem führt der Eingriff dazu, dass der Prozess eine negative Korrelation zum Lag 1 besitzt.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

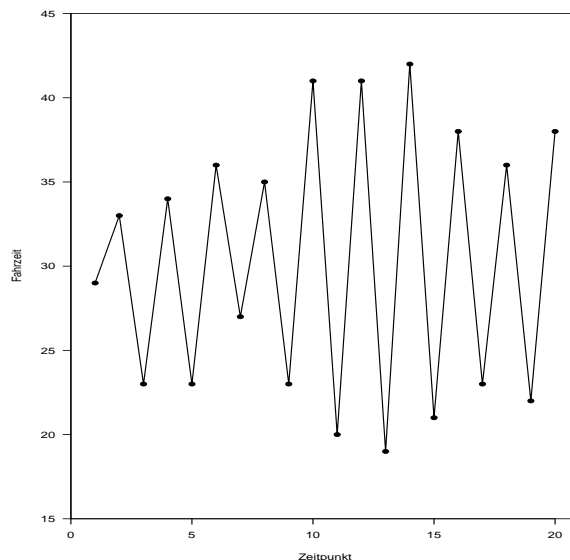
Schauen wir uns nun den Eingriff ohne Gedächtnis an.

Die ersten beiden Tage sind mit dem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis identisch. Der Arbeitnehmer wählt den Zeitpunkt der Ankunft als Kriterium für den Eingriff. Am ersten Tag kommt er um 8 Uhr 29 an und fährt am nächsten Tag um 8 Uhr 1 los. Er kommt um 8 Uhr 33 an. Er muss also am dritten Tag 3 Minuten früher losfahren. Jetzt vergisst er aber, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist und orientiert sich an 8 Uhr. Er fährt am dritten Tag also um 7 Uhr 57 los und kommt um 8 Uhr 23 an. Wenden wir dieses Prinzip auf die gesamte Reihe an, so erhalten wir folgende Reihe nach dem Eingriff ohne Gedächtnis:

29 33 23 34 23 36 27 35 23 41 20 41 19 42 21 38 23 36 22 38

Abbildung 2.9 zeigt den resultierenden Prozess.

Abbildung 2.9: Prozess nach Eingriff ohne Gedächtnis



Bei einem Eingriff ohne Gedächtnis gilt

$$E_1 = X_1$$

Für  $t > 1$  gilt:

$$E_t = X_t + z_0 - E_{t-1} \quad (2.17)$$

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Mit  $X_1 = 29$  folgt  $E_1 = 29$ .

Mit  $X_2 = 29$ ,  $E_1 = 32$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_2 = 32 + 30 - 29 = 33$$

Mit  $X_3 = 26$ ,  $E_2 = 33$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_3 = 26 + 30 - 33 = 23$$

Es stellt sich die Frage, ob der Eingriff die Struktur des Prozesses verändert. Schauen wir uns dies zunächst für das Beispiel an.

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Für den ursprünglichen Prozess gilt

$$\bar{x} = 30 \quad s^2 = 4.84 \quad r_1 = 0.109$$

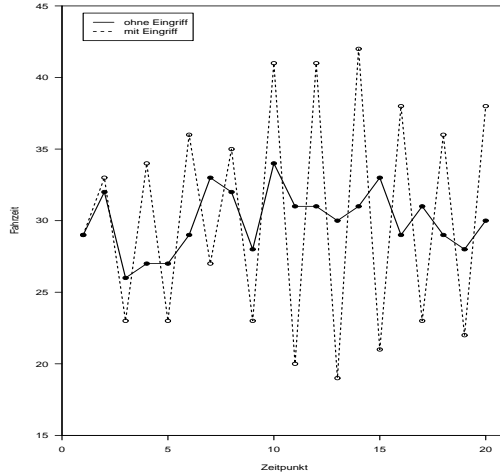
Nach dem Eingriff ohne Gedächtnis erhalten wir folgende Werte

$$\bar{e} = 30.2 \quad s^2 = 63.5 \quad r_1 = -0.936$$

Das Niveau des Prozesses hat sich nicht geändert, während die Varianz sich drastisch vergrößert hat. Der ursprüngliche Prozess wies nahezu keine Autokorrelation zum Lag 1 auf, während der Autokorrelationskoeffizient nach dem Eingriff den Wert  $-0.936$  aufweist. Benachbarte Beobachtungen sind fast perfekt mit einander negativ korreliert. Der Autokorrelationskoeffizient zum Lag 2 nimmt den Wert  $0.879$  an.

Abbildung 2.10 mit beiden Prozessen bestätigt dies.

Abbildung 2.10: Prozess ohne Eingriff und nach Eingriff ohne Gedächtnis



Um die Konsequenzen untersuchen zu können, muss man den Prozess in Abhängigkeit von  $X_t, X_{t-1}, \dots$  darstellen. Mit  $E_1 = X_1$  gilt:

$$E_2 = X_2 + z_0 - E_1 = X_2 + z_0 - X_1$$

Schauen wir uns noch  $E_3$  an:

$$\begin{aligned} E_3 &= X_3 + z_0 - E_2 \\ &= X_3 + z_0 - (X_2 + z_0 - X_1) \\ &= X_3 + z_0 - X_2 - z_0 + X_1 \\ &= X_3 - X_2 + X_1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt für  $t > 1$ :

$$E_t = 0.5(1 + (-1)^t) z_0 + X_t - X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + (-1)^{t-1} X_1. \quad (2.18)$$

Hieraus folgt

$$E(E_t) = \mu \quad (2.19)$$

und

$$\text{Var}(E_t) = t \sigma^2. \quad (2.20)$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_k$  zum Lag  $k$  ist der Korrelationskoeffizient zwischen  $E_{t-k}$  und  $E_t$ . Für diesen gilt

$$\rho_k = (-1)^k \sqrt{1 - \frac{k}{t}}$$

Die Herleitung dieser Beziehungen ist nicht schwer, aber mühselig. Deshalb verzichten wir an dieser Stelle darauf und verweisen auf Sparks and Field (2000).

Ein Eingriff ohne Gedächtnis hat auch keinen Einfluss auf das Niveau des Prozesses. Die Varianz wächst aber linear in der Länge des Prozesses. Sind bei einem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis nur benachbarte Beobachtungen miteinander korreliert, so sind bei einem Eingriff ohne Gedächtnis alle Beobachtungen miteinander korreliert. Diese Korrelation hängt auch noch davon ab, wie lange der Prozess schon läuft, und wird mit fortgeschrittener Zeit immer betragsmäßig größer. So gilt im Zeitpunkt  $t = 2$ ,

$$\rho_1 = -\sqrt{1 - 0.5} = -0.707$$

während im Zeitpunkt  $t = 10$  gilt

$$\rho_1 = -\sqrt{1 - 0.1} = -0.949$$

Schauen wir uns noch ein Beispiel an.

### Beispiel 3

In einer Fabrik wird Mehl in Tüten abgepackt. Der Zielwert ist 500. Dieser wird auch vom Prozess eingehalten. Es gilt also  $\mu = 500$ . Das Gewicht von 4 Tüten wird bestimmt. Es ergeben sich folgende Werte:

501 499 502 499

Der Arbeiter kann jede Packung nach dem Abfüllen wiegen. In Abhängigkeit vom Gewicht der Packung kann er in den Prozess dadurch eingreifen, dass er vor dem Abfüllen der nächsten Packung die Stellung eines Schalters verändert. Hierdurch legt er fest, wieviel Gramm mehr oder weniger bei der nächsten Packung abgefüllt werden sollen. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass ein wenig länger oder kürzer abgefüllt wird. Schauen wir uns dies für die erste Packung an. Sie wiegt 501 g, also ein Gramm zu viel. Der Arbeiter würde also vor dem Abfüllen der zweiten Packung den Schalter auf  $-1$  stellen, sodass in die nächste Packung ein Gramm weniger gefüllt wird. Die zweite Packung würde nach diesem Eingriff also  $E_2 = 498$  Gramm wiegen. Nach dem Abfüllen einer Packung, hat der Arbeiter zwei Möglichkeiten



1. Er kann den Schalter in der Stellung lassen.
2. Er kann den Schalter auf 0 stellen.

Beim ersten Fall des Beispiels handelt es sich um einem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis, im zweiten Fall um einem Eingriff ohne Gedächtnis.

Beim Eingriff mit unendlichem Gedächtnis bleibt der Schalter nach einem Eingriff in seiner Position und wird von dieser aus beim nächsten Eingriff verändert. Nach dem ersten Eingriff steht der Schalter in der Position  $-1$ . Hierdurch wird bei der zweiten Packung 1 g weniger abgefüllt. Wir beobachten den Wert  $E_2 = 498$ . Da dieser 2 Einheiten unter dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 2 g mehr abgefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 2 erhöht werden muss. Er steht danach auf dem Wert  $+1$ . Hierdurch erhöht sich das Gewicht der dritten Packung um den Wert 1 und wir beobachten den Wert  $E_3 = 503$ . Da dieser 3 Einheiten über dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 3 g weniger eingefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 3 vermindert werden muss. Er steht danach auf dem Wert  $-2$ . Hierdurch vermindert sich das Gewicht der vierten Packung um den Wert 2 und wir beobachten den Wert  $E_4 = 497$ .

Beim Eingriff ohne Gedächtnis wird der Schalter nach einem Eingriff auf den Wert 0 gestellt und wird von diesem Wert aus beim nächsten Eingriff verändert. Nach dem ersten Eingriff steht der Schalter in der Position  $-1$ . Hierdurch wird bei der zweiten Packung 1 g weniger abgefüllt. Wir beobachten den Wert  $E_2 = 498$ . Der Schalter wird jetzt auf den Wert 0 gestellt. Da der Wert  $E_2$  2 Einheiten unter dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 2 g mehr abgefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 2 erhöht werden muss. Er steht danach auf dem Wert 2. Hierdurch erhöht sich das Gewicht der dritten Packung um den Wert 2 und wir beobachten den Wert  $E_3 = 504$ . Der Schalter wird jetzt auf den Wert 0 gestellt. Da der Wert  $E_3$  4 Einheiten über dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 4 g weniger eingefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 4 vermindert werden muss. Er steht danach auf dem Wert  $-4$ . Hierdurch vermindert sich das Gewicht der vierten Packung um den Wert 4 und wir beobachten den Wert  $E_4 = 495$ .

## 2.4 Qualitätsregelkarten

### 2.4.1 Was ist eine Qualitätsregelkarte?

Wir gehen im Folgenden von einem Prozess aus und beobachten die Realisationen  $x_1, x_2, \dots$  der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ . Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es unterschiedliche Quellen der Variabilität gibt. Sind nur zufällige Quellen der Variabilität aktiv, so zeigt der Prozess ein stabiles Verhalten. Dies bedeutet, dass der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  des interessierenden Merkmals konstant sind. Ist ein Prozess stabil, so ist er unter statistischer Kontrolle und sein Verhalten ist prognostizierbar. Dies ist natürlich wünschenswert. Wirken hingegen systematische Quellen der Variation, so ist der Prozess nicht mehr unter statistischer Kontrolle. Dies kann dazu führen, dass sich das Niveau oder Variabilität ändern. Es kann aber auch sein, dass die Beobachtungen autokorreliert sind.

Gerät ein Prozess außer Kontrolle, so sollte dies natürlich schnell bemerkt werden, damit man eingreifen und die Ursache beheben kann. Dies ist mit Hilfe von **Qualitätsregelkarten** möglich. Diese wurden 1924 von Shewhart entwickelt.

Um den Prozess mit Hilfe einer Qualitätsregelkarte zu überwachen, werden zu äquidistanten Zeitpunkten Stichproben vom Umfang  $n$  gezogen und aus diesen der Wert von einer oder mehreren Stichprobenfunktionen bestimmt. Wir betrachten zunächst eine Stichprobenfunktion  $W$ .

#### Beispiel 4

Ein Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit zu seiner Arbeitsstelle und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Hier ist der Stichprobenumfang  $n$  gleich 1.

#### Beispiel 5

Ein Bäcker bestimmt nach jedem Backvorgang das Gewicht von 2 Brötchen. Bei 20 Backvorgängen erhält er folgende Wertepaare:

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (72, 70) | (72, 66) | (69, 67) | (70, 72) | (68, 70) |
| (71, 69) | (69, 66) | (66, 72) | (67, 71) | (74, 66) |
| (72, 72) | (71, 71) | (69, 67) | (70, 72) | (71, 72) |
| (69, 69) | (72, 75) | (71, 68) | (74, 68) | (72, 68) |

Hier ist  $n = 2$ .

Aus den Daten bestimmt man den Wert der Stichprobenfunktion  $W$  zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots$  und erhält eine Folge von Realisationen  $w_1, w_2, \dots$  der Stichprobenfunktion. Will man überprüfen, ob der Prozess hinsichtlich der Lage unter Kontrolle ist, so wird man den Mittelwert der Beobachtungen bestimmen, die zu einem Zeitpunkt erhoben wurden.

Eine Qualitätsregelkarte erhält man, indem man in einem kartesischen Koordinatensystem die Werte  $w_1, w_2, \dots$  der Stichprobenfunktion  $W$  gegen die Zeitpunkte abträgt. Es wird also ein Run-Chart erstellt. An diesem wird man in der Regel nicht erkennen können, ob der Prozess unter Kontrolle ist. Ergänzt man den Run-Chart aber um sogenannte **Kontrollgrenzen**, so kann sehr leicht festgestellt werden, ob der Prozess außer Kontrolle ist.

Ist  $\mu_W = E(W_t)$  der Erwartungswert und  $\sigma_W^2 = Var(W_t)$  die Varianz der Stichprobenfunktion, wenn der Prozess unter Kontrolle ist, so sind die von Shewhart vorgeschlagenen Grenzen:

$$LCL = \mu_W - K \cdot \sigma_W \quad (2.21)$$

und

$$UCL = \mu_W + K \cdot \sigma_W \quad (2.22)$$

$UCL$  steht für **upper control limit** und  $LCL$  steht für **lower control limit**. Im deutschsprachigen Raum verwendet man auch die Bezeichnungen  $UEG$  und  $OEG$ , die für **obere Eingriffsgrenze** und **untere Eingriffsgrenze** stehen.

Shewhart setzte  $K$  auf den Wert 3. Wir übernehmen diese Wahl und gehen also von folgenden Grenzen aus:

$$LCL = \mu_W - 3 \cdot \sigma_W \quad (2.23)$$

und

$$UCL = \mu_W + 3 \cdot \sigma_W \quad (2.24)$$

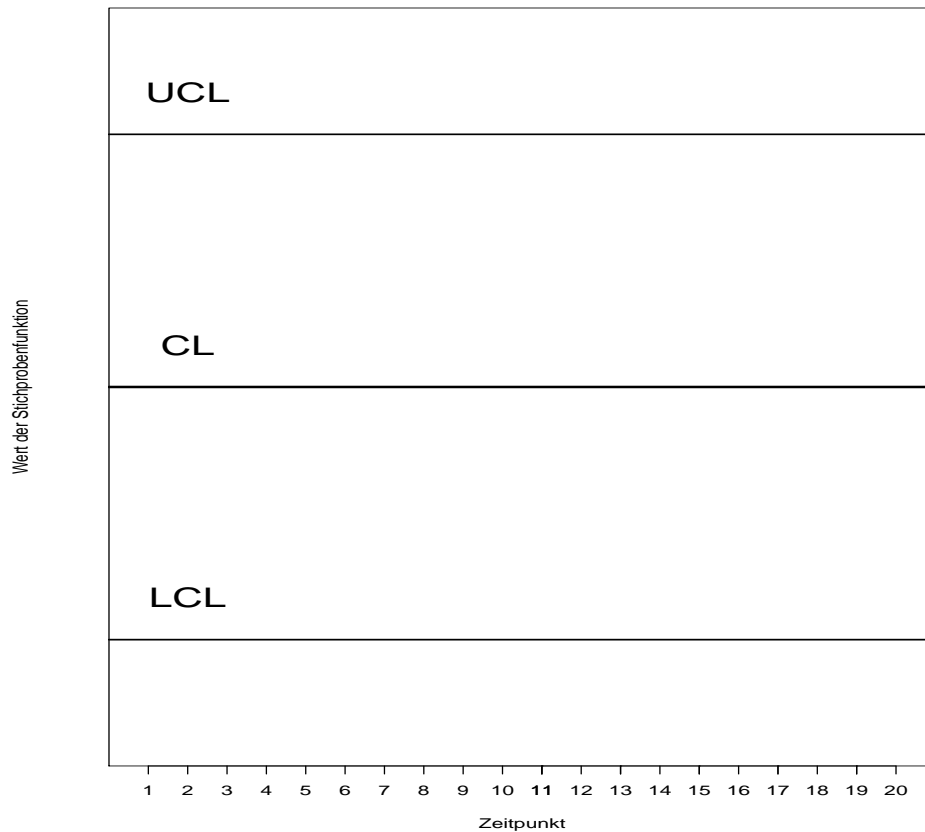
Außerdem wird noch die center line  $CL = \mu_W$  oder Mittellinie  $M$  eingezeichnet.

Abbildung 2.11 zeigt den typischen Aufbau einer Qualitätsregelkarte.

Von Shewhart wurde folgende einfache Regel vorgeschlagen:

Ist der Wert  $w_t$  der Stichprobenfunktion  $W_t$  im Zeitpunkt  $t$  kleiner als der LCL oder größer als der UCL, dann gehen wir davon aus, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist. Er muss dann angehalten werden, der Fehler gesucht und beseitigt werden.

Abbildung 2.11: Aufbau einer Qualitätsregelkarte



### 2.4.2 Die $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen

In der Regel werden  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  unbekannt sein. Dann muss man sie schätzen. Damit werden wir uns später beschäftigen. Wir gehen zunächst davon aus, dass  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  bekannt sind, und betrachten eine Qualitätsregelkarte, mit der überprüft werden soll, ob das Niveau eines Prozesses unter Kontrolle ist. Man spricht von der  $\bar{X}$ -Karte.

Wir werden später sehen, dass eine Vielzahl von Gründen dafür spricht zu einem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n > 1$  zu ziehen. In der Massenproduktion von Gütern ist dies leicht zu realisieren.

#### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Der Bäcker backt in der Regel mehrere Brötchen.

Oft ist es nicht möglich, zu einem Zeitpunkt mehr als einen Wert zu beobachten.

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer fährt jeden Morgen nur einmal zur Arbeit.

Wenn zu einem Zeitpunkt  $t$  dem Prozess nur eine Beobachtung entnommen wird, so wählt man als Stichprobenfunktion  $W_t$  die Beobachtung  $X_t$ ,

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Da  $n$  gleich 1 ist, gilt  $w_t = x_t$ .

Ist hingegen der Stichprobenumfang  $n$  im Zeitpunkt  $t$  größer als 1, so wird man als Stichprobenfunktion den Mittelwert der Beobachtungen im Zeitpunkt  $t$  wählen.

Ist  $x_{tj}$  die  $j$ -te Beobachtung in der  $t$ -ten Stichprobe, so bilden wir

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} \quad (2.25)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Da  $n$  gleich 2 ist, gilt  $w_t = 0.5(x_{t1} + x_{t2})$ . In Tabelle 2.2 werden die Werte bestimmt.

Tabelle 2.2: Hilfstabelle zur Erstellung einer Qualitätsregelkarte

| $t$ | $x_{t1}$ | $x_{t2}$ | $\bar{x}_t$ |
|-----|----------|----------|-------------|
| 1   | 72       | 70       | 71.0        |
| 2   | 72       | 66       | 69.0        |
| 3   | 69       | 67       | 68.0        |
| 4   | 70       | 72       | 71.0        |
| 5   | 68       | 70       | 69.0        |
| 6   | 71       | 69       | 70.0        |
| 7   | 69       | 66       | 67.5        |
| 8   | 66       | 72       | 69.0        |
| 9   | 67       | 71       | 69.0        |
| 10  | 74       | 66       | 70.0        |
| 11  | 72       | 72       | 72.0        |
| 12  | 71       | 71       | 71.0        |
| 13  | 69       | 67       | 68.0        |
| 14  | 70       | 72       | 71.0        |
| 15  | 71       | 72       | 71.5        |
| 16  | 69       | 69       | 69.0        |
| 17  | 72       | 75       | 73.5        |
| 18  | 71       | 68       | 69.5        |
| 19  | 74       | 68       | 71.0        |
| 20  | 72       | 68       | 70.0        |

Nun benötigen wir noch die Grenzen der Karte. Da wir davon ausgehen, dass die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  des Prozesses bekannt sind, gilt wegen  $W_t = X_t$  für  $n = 1$

$$\mu_W = E(W_t) = E(X_t) = \mu \quad (2.26)$$

und

$$\sigma_W^2 = Var(W_t) = Var(X_t) = \sigma^2 \quad (2.27)$$

Setzen wir die Gleichungen (2.26) und (2.27) in die Gleichungen (2.23) und (2.24) auf Seite 34 ein, so erhalten wir

$$LCL = \mu - 3 \cdot \sigma \quad (2.28)$$

$$CL = \mu \quad (2.29)$$

$$UCL = \mu + 3 \cdot \sigma \quad (2.30)$$

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer weiß, dass  $\mu = 30$  und  $\sigma = 2$  gilt. Daraus ergibt sich

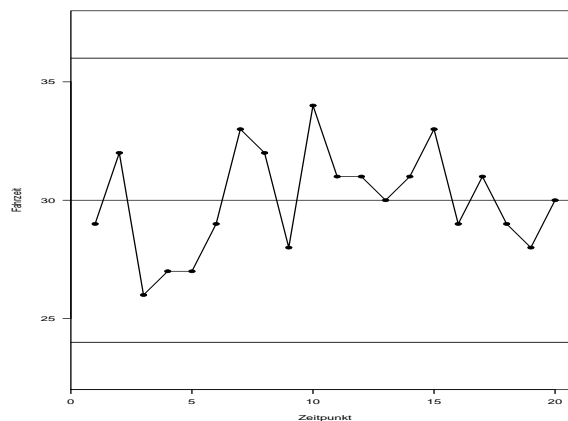
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 = 24$$

$$CL = 30$$

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 = 36$$

Die Qualitätsregelkarte ist in Abbildung 2.12 zu finden.

Abbildung 2.12: Qualitätsregelkarte der Fahrzeit



Offensichtlich ist der Prozess unter Kontrolle, da sich keine Realisation der Zufallsvariablen außerhalb der Grenzen befindet.

Ist  $n > 1$ , so müssen wir uns die Eigenschaften von  $\bar{X}$  anschauen. Es gilt

$$\mu_W = E(W_t) = E(\bar{X}) = \mu \quad (2.31)$$

und

$$\sigma_W^2 = \text{Var}(W_t) = \text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n \quad (2.32)$$

Setzen wir die Gleichungen (2.31) und (2.32) in die Gleichungen (2.23) und (2.24) auf Seite 34 ein, so erhalten wir die Grenzen:

$$LCL = \mu - 3 \cdot \sigma/\sqrt{n} \quad (2.33)$$

$$CL = \mu \quad (2.34)$$

$$UCL = \mu + 3 \cdot \sigma/\sqrt{n} \quad (2.35)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Der Bäcker weiß, dass gilt  $\mu = 70$  und  $\sigma = 2$ . Also gilt

$$LCL = 70 - 3 \cdot 2/\sqrt{2} = 65.76$$

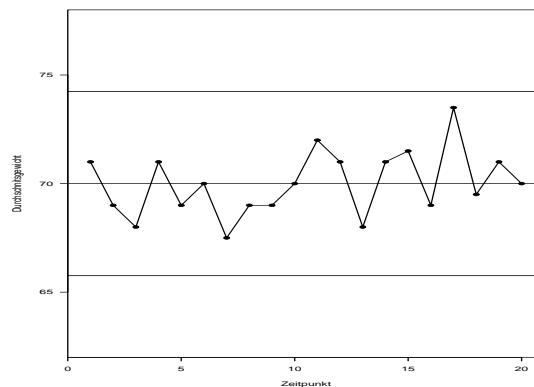
$$CL = 70$$

$$UCL = 70 + 3 \cdot 2/\sqrt{2} = 74.24$$

Nun zeichnet man die Grenzen in den Run-Chart und erhält die Qualitätsregelkarte. Ist ein Wert der Stichprobenfunktion  $\bar{X}$  kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$ , so gehen wir davon aus, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist.

Die Qualitätsregelkarte ist in Abbildung 2.13 zu finden. Offensichtlich ist der Prozess hier ebenfalls unter Kontrolle.

Abbildung 2.13: Qualitätsregelkarte des Durchschnittsgewichtes von zwei Brötchen



Zum Vergleich zeigt die Darstellung links oben in Abbildung 2.15 auf Seite 43 einen Prozess, der nicht unter Kontrolle ist.

Wieso spricht ein Wert der Stichprobenfunktion, der kleiner als der  $LCL$  oder größer als  $UCL$  ist dafür, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist?

Schauen wir uns zur Beantwortung dieser Frage an, wie Shewart vorgegangen ist. Dieser formulierte die Entscheidungsregel als statistische Hypothesen:

$H_0$ : Der Prozess ist unter Kontrolle

$H_1$ : Der Prozess ist nicht unter Kontrolle



Die Teststatistik zur Überprüfung der Hypothesen ist  $W_t = \bar{X}$ .  
Die Entscheidungsregel lautet:

Entscheidung für  $H_1$ , wenn  $W_t < LCL$  oder  $W_t > UCL$ .

Entscheidung für  $H_0$ , wenn  $LCL \leq W_t \leq UCL$ .

Bei einem statistischen Test können zwei Fehler begangen werden:

Man begeht einen Fehler 1. Art, wenn man sich für  $H_1$  entscheidet, obwohl  $H_0$  zutrifft.

Man begeht einen Fehler 2. Art, wenn man sich für  $H_0$  entscheidet, obwohl  $H_1$  zutrifft.

Die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art wird in der Regel vorgegeben und nimmt in der Statistik und Ökonometrie häufig Werte von 0.01, 0.05 oder 0.1 an. Man wählt also einen kleinen Wert. Dann kann man sich ziemlich sicher sein, eine richtige Entscheidung getroffen zu haben, wenn man  $H_0$  ablehnt. Denn die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung ist entsprechend klein. In unserem Fall können wir die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art berechnen, wenn wir Normalverteilung von  $W_t$  unterstellen. Ist die Stichprobenfunktion  $W_t$  gleich  $\bar{X}$  und der Stichprobenumfang  $n$  relativ groß, so ist  $\bar{X}$  auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes approximativ normalverteilt. Dies ist der erste Grund für  $n > 1$ .

Wir gehen also davon aus, dass  $W_t$  mit den Parametern  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  normalverteilt ist, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. In diesem Fall gilt

$$\alpha = \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \quad (2.36)$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Diese ist in den Tabellen B.3 und B.4 auf den Seiten 182 und 183 tabelliert. Wir entnehmen Tabelle B.3:

$$\Phi(3) = 0.99865.$$

Da bei Standardnormalverteilung gilt

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

folgt

$$\Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135.$$

Somit gilt

$$\alpha = 0.00135 + 0.00135 = 0.0027$$

Ist der Prozess also unter Kontrolle, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 0.0027, sich dafür zu entscheiden, dass er nicht unter Kontrolle ist. Entscheiden wir uns also dafür, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist, so können wir uns sehr sicher sein, dass unsere Entscheidung richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung beträgt ja nur 0.0027.

Schauen wir uns an, warum Gleichung (2.36) auf Seite 40 erfüllt ist.

Ein Fehler 1. Art wird begangen, wenn  $\bar{X}$  kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$  ist und der Prozess unter Kontrolle ist, also  $H_0$  zutrifft. Somit gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= P(W_t < LCL | H_0) + P(W_t > UCL | H_0) \\ &= P(W_t < \mu_W - 3 \cdot \sigma_W | H_0) + P(W_t > \mu_W + 3 \cdot \sigma_W | H_0) \\ &= P(W_t < \mu_W - 3 \cdot \sigma_W | H_0) + 1 - P(W_t \leq \mu_W + 3 \cdot \sigma_W | H_0) \\ &= P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < -3 | H_0\right) + 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < 3 | H_0\right) \end{aligned}$$

Trifft  $H_0$  zu, so ist der Prozess unter Kontrolle und  $W_t$  ist mit den Parametern  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  normalverteilt. Also ist

$$Z = \frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W}$$

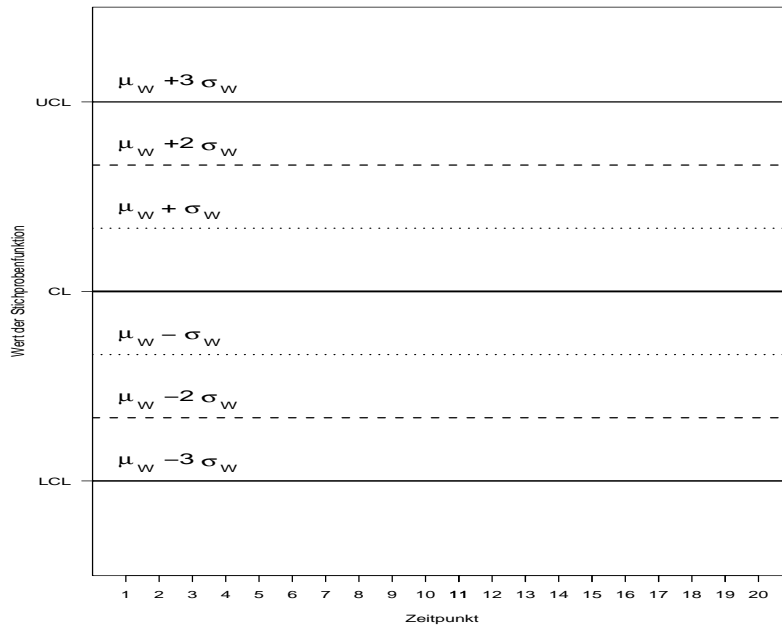
standardnormalverteilt mit der Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$ .

Somit gilt

$$\begin{aligned} P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < -3\right) + 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < 3\right) &= P(Z < -3) + 1 - P(Z < 3) \\ &= \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \end{aligned}$$

Bevor wir uns in Kapitel 2.4.3 auf Seite 45 die Wahrscheinlichkeit des Fehler 2. Art näher anschauen, betrachten wir einige andere Entscheidungsregeln, die von Western Electric vorgeschlagen wurden. Bei diesen Regeln ergänzt man die Qualitätsregelkarte um weitere Grenzen. Man legt um die Mittellinie Parallelen im Abstand  $\sigma_W$  und  $2\sigma_W$ . Abbildung 2.14 zeigt die Karte mit den Grenzen.

Abbildung 2.14: Qualitätsregelkarte mit zusätzlichen Grenzen

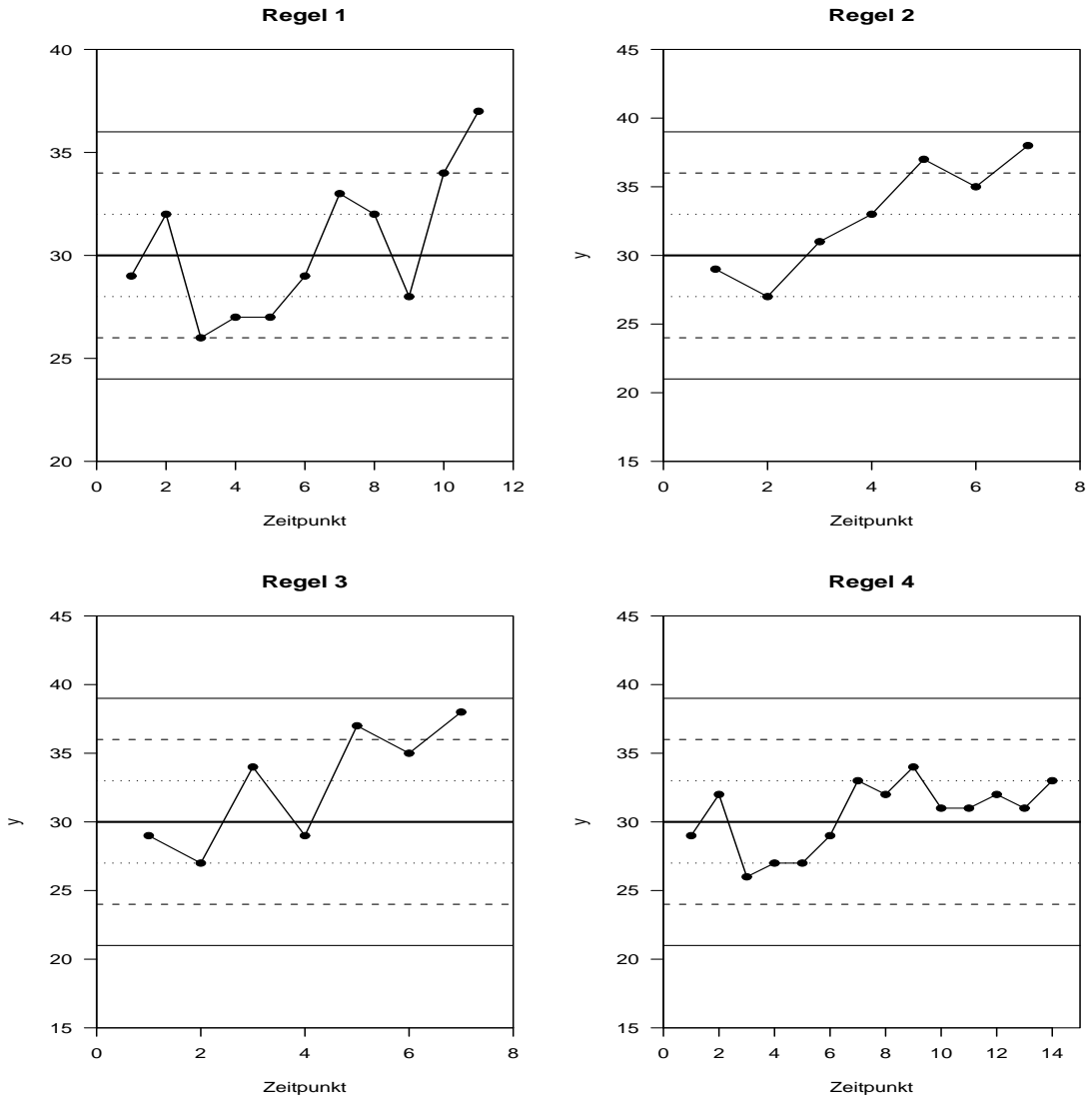


Zusätzlich zur Regel von Shewhart geht man davon aus, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist, wenn

2. mindestens zwei von drei aufeinander folgenden Punkten auf einer Seite der Mittellinie außerhalb der  $2\sigma_W$  Warngrenzen liegen,
3. oder mindestens vier von fünf aufeinander folgenden Punkten auf einer Seite der Mittellinie außerhalb der  $1\sigma_W$  Grenzen liegen
4. oder 8 aufeinander folgende Punkte auf einer Seite der Mittellinie liegen.

Abbildung 2.15 zeigt Beispiele für die vier Regeln.

Abbildung 2.15: Regeln für Qualitätsregelkarten



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei den drei zusätzlichen Regeln?

Schauen wir uns zunächst Regel 2 an. Wir betrachten zunächst den Fall, dass mindestens 2 von drei aufeinander folgenden  $W_t$  größer als  $\mu_W + 2\sigma_W$  sind. Wenn der Prozess unter Kontrolle ist, so gilt für ein  $W_t$ :

$$\begin{aligned} P(W_t > \mu_W + 2\sigma_W) &= 1 - P(W_t \leq \mu_W + 2\sigma_W) \\ &= 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} \leq 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

Sei  $Y$  die Anzahl unter den drei  $W_t$ , die größer als  $\mu_W + 2\sigma_W$  sind. Ist der Prozess unter Kontrolle, so ist  $Y$  binomialverteilt mit den Parametern  $n = 3$  und  $p = 0.02275$ . Gesucht ist  $P(Y \geq 2)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) = 3 \cdot 0.02275^2 \cdot 0.97725 + 0.02275^3 \\ &= 0.00154 \end{aligned}$$

Für die andere Seite der Mittellinie erhält man denselben Wert. Also gilt  $\alpha = 2 \cdot 0.00154 = 0.00308$ .

Für Regel 3 liefern analoge Überlegungen  $\alpha = 0.00553$ .

Schauen wir noch die vierte Regel an. Ist der Prozess unter Kontrolle, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 0.5, dass ein  $W_t$  Beobachtung auf einer Seite der Mittellinie liegt. Da die  $W_t$  unabhängig sind, wenn der Prozess unter Kontrolle ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 8 aufeinander folgende Beobachtungen auf einer Seite der Mittellinie liegen:

$$0.5^8 = 0.0039$$

Also gilt  $\alpha = 0.0078$ .

Kehren wir noch einmal zur Shewhart-Karte zurück. Wählen wir in den Gleichungen (2.21) und (2.22) auf Seite 34 für  $K$  einen anderen Wert, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Setzen wir  $K = 3.09$ , so entnehmen wir Tabelle B.4 auf Seite 183, dass  $\Phi(3.09) = 0.999$  gilt. Also gilt

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \Phi(3.09)) = 2 \cdot (1 - 0.999) = 0.002$$

In Großbritannien setzt man häufig  $K = 3.09$ .

### 2.4.3 Die OC-Funktion und ARL

Überprüfen wir die Lage eines Prozesses, so nimmt der Lageparameter  $\mu$  einen speziellen Wert  $\mu_0$  an, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Aus diesem Grund ist die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art eindeutig definiert. Ist der Prozess aber nicht mehr unter Kontrolle, so gibt es unendlich viele Werte von  $\mu$ , die in Frage kommen. Somit hängt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art davon ab, welchen Wert  $\mu_1$  annimmt, wenn der Prozess nicht unter Kontrolle ist. Wir wollen im Folgenden bestimmen, wie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art von  $\mu_1$  abhängt, wenn wir die  $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen verwenden. Für die Grenzen der Qualitätsregelkarte gilt also

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \\ CL &= \mu_0 \\ UCL &= \mu_0 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \end{aligned}$$

Nun mögen sich die Lage des Prozesses zum Wert  $\mu_1 \neq \mu_0$  verschieben, während die Varianz  $\sigma^2$  sich nicht ändert. Also trifft  $H_1$  zu.

Da  $\mu_1$  der Wert von  $\mu$  ist, ist  $\bar{X}$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1$  und  $\sigma / \sqrt{n}$  und damit

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (2.37)$$

standardnormalverteilt.

Ein Fehler 2. Art wird begangen, wenn wir entscheiden, dass der Prozess unter Kontrolle ist,  $\mu_1$  aber in Wirklichkeit ungleich  $\mu_0$  ist.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art ist also

$$\begin{aligned} OC(\mu_1) &= P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL | H_1) \\ &= P(\mu_0 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} | H_1) \\ &= P(\mu_0 - \mu_1 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq \bar{X} - \mu_1 \leq \mu_0 - \mu_1 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} | H_1) \\ &= P\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3 \leq \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3 | H_1\right) \\ &\stackrel{(2.37)}{=} P\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3 \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3\right) \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  weiterhin der Wert der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle  $z$ .

Man nennt in diesem Zusammenhang  $OC(\mu_1)$  auch die **Operationscharakteristik** an der Stelle  $\mu_1$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art in Abhängigkeit von  $\mu_1$  an.

Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art gilt also:

$$OC(\mu_1) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 3\right) \quad (2.38)$$

### Beispiel 6

Die Fahrzeit des Arbeitnehmers sei normalverteilt mit Erwartungswert 30 und Varianz 4. Der Erwartungswert der Fahrzeit verschiebt sich zum Wert 32. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte dies bei der nächsten Fahrt nicht bemerkt?

Es gilt  $\mu_0 = 30$ ,  $\sigma = 2$  und  $\mu_1 = 32$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} OC(32) &= \Phi\left(\frac{30 - 32}{2/\sqrt{1}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{30 - 32}{2/\sqrt{1}} - 3\right) = \Phi(2) - \Phi(-4) \\ &= 0.97725 \end{aligned}$$

Verschiebt sich die Lage hingegen zum Wert  $\mu_1 = 34$ , so gilt

$$\begin{aligned} OC(34) &= \Phi\left(\frac{30 - 34}{2/\sqrt{1}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{30 - 34}{2/\sqrt{1}} - 3\right) = \Phi(1) - \Phi(-5) \\ &= 0.84134 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art kleiner wird, wenn die Lageverschiebung größer wird.

Die Lageverschiebung des Prozesses wird entdeckt, wenn  $\bar{X}$  einen Wert annimmt, der kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$  ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$G(\mu_1) = 1 - OC(\mu_1) \quad (2.39)$$

Man nennt  $G(\mu_1)$  auch die **Gütefunktion** an der Stelle  $\mu_1$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Stichprobe eine Lageverschiebung zum neuen Wert  $\mu_1$  zu entdecken.

### Beispiel 6 (fortgesetzt)

Es gilt

$$G(32) = 1 - OC(32) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

Verschiebt sich die Lage hingegen zum Wert  $\mu_1 = 34$ , so gilt

$$G(34) = 1 - OC(34) = 1 - 0.84134 = 0.15866$$

Wir sehen, dass die Gütefunktion größer wird, wenn die Lageverschiebung größer wird.

Wir können nun auch die Frage beantworten, warum man zu einem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n > 1$  ziehen sollte. Die Wahrscheinlichkeit, einen Lageunterschied zu entdecken, ist für  $n > 1$  größer als für  $n = 1$ . Schauen wir uns dies für ein Beispiel an.

### Beispiel 7

Das Gewicht  $X$  eines Brötchens sei normalverteilt mit  $E(X) = 70$  und  $Var(X) = 4$ , wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Die Lage des Prozesses verschiebt sich zum Wert 72. Es gilt somit  $\mu_0 = 70$ ,  $\sigma = 2$  und  $\mu_1 = 72$ .

Ist  $n = 1$ , so gilt

$$\begin{aligned} G(72) &= 1 - \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{1}} + 3\right) + \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{1}} - 3\right) \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-4) = 1 - 0.99725 = 0.00275 \end{aligned}$$

Ist  $n = 4$ , so gilt

$$\begin{aligned} G(72) &= 1 - \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{4}} + 3\right) + \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{4}} - 3\right) \\ &= 1 - \Phi(1) + \Phi(-5) = 1 - 0.84134 = 0.15866 \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Frage beantworten, wie lange man im Mittel warten muss, bis die  $\bar{X}$ -Karte eine Lageverschiebung zum Wert  $\mu_1$  entdeckt. Hierzu betrachten wir die Zufallsvariable  $V$ , die die Anzahl der Stichproben zählt, bis  $\bar{X}$  zum ersten Mal außerhalb des Intervalls  $[LCL, UCL]$  liegt.

Sei  $p$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{X}$  außerhalb des Intervalls  $[LCL, UCL]$  liegt. Mit dieser Definition ist  $V$  geometrisch verteilt mit dem Parameter  $p$ . Für  $v = 1, 2, \dots$  gilt also

$$P(V = v) = (1 - p)^{v-1} p. \quad (2.40)$$

Die Gültigkeit von Gleichung (2.40) macht man sich folgendermaßen klar: Bei jeder Stichprobe gibt es zwei Möglichkeiten. Der Mittelwert liegt im Intervall  $[LCL, UCL]$  oder liegt nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass er nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$  liegt, ist gleich  $p$ . Wir warten



so lange, bis eine Beobachtung zum ersten Mal nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$  liegt. Wenn dies bei der  $v$ -ten Stichprobe zum ersten Mal geschieht, müssen alle  $v - 1$  Mittelwerte vor dieser Stichprobe im Intervall  $[LCL, UCL]$  gelegen haben. Da wir Unabhängigkeit unterstellen, gilt

$$P(V = v) = \underbrace{(1 - p) \cdot (1 - p) \cdot \dots \cdot (1 - p)}_{v-1 \text{ Faktoren}} = (1 - p)^{v-1} p.$$

**Beispiel 6 (fortgesetzt)**

Die mittlere Fahrzeit hat sich zum Wert 32 verschoben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte dies bei der übernächsten Stichprobe bemerkt?

Wir wissen  $G(32) = 0.02275$ . Somit gilt

$$P(V = 2) = (1 - p) p = 0.97725 \cdot 0.02275 = 0.0223$$

Der Erwartungswert von  $V$  ist:

$$E(V) = \frac{1}{p}$$

Diese Größe nennt man auch die **ARL (average run length)**. Die *ARL* gibt an, wie lange man im Mittel warten muss, bis man eine vorgegebene Lageverschiebung entdeckt.

**Beispiel 6 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$ARL = \frac{1}{0.02275} = 43.96$$

Man benötigt also im Mittel 44 Beobachtungen um die Lageverschiebung bei der Fahrzeit zu entdecken.

Man kann die *ARL* auch berechnen, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Man spricht dann von der **in-control ARL<sub>0</sub>**. Diese ergibt sich folgendermaßen:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{2.41}$$

Sie gibt an, wie lange man im Mittel warten muss, bis die Karte einen Fehlalarm gibt.

Bei der klassischen Shewhart-Karte mit  $K = 3$  gilt  $\alpha = 0.0027$ . Also gilt

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370.4$$

Verwendet man hingegen  $K = 3.09$ , so erhält man

$$ARL_0 = \frac{1}{0.002} = 500$$

Wir schauen uns nun die klassische Shewhart-Karte mit  $K = 3$  und betrachten für  $n = 1$  eine Verschiebung der Lage um  $k$  Standardabweichungen. Es gilt also

$$\mu_1 = \mu_0 + k \cdot \sigma.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (2.39) auf Seite 46 ein, so erhalten wir

$$G(\mu_0 + k \cdot \sigma) = 1 - \Phi(3 - k) + \Phi(-3 - k)$$

In Tabelle 2.3 ist die ARL in Abhängigkeit von  $k$  zu finden.

Tabelle 2.3: ARL in Abhängigkeit von  $k$

| $k$   | 0.0   | 0.5   | 1.0  | 1.5  | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
|-------|-------|-------|------|------|-----|-----|-----|
| $ARL$ | 370.4 | 155.2 | 43.9 | 15.0 | 6.3 | 3.2 | 2.0 |

Wir sehen, dass die  $\bar{X}$ -Karte sehr lange Zeit benötigt, um kleine Lageunterschiede aufzudecken. Bei großen Lageunterschieden ist sie hingegen sehr gut. Wir werden später eine Qualitätsregelkarte betrachten, die kleine Lageunterschiede sehr schnell entdeckt.

#### 2.4.4 Die $\bar{X}/R$ -Karte

Die Grenzen einer Qualitätsregelkarte hängen in der Regel von den Parametern des Prozesses ab. Will man zum Beispiel die  $\bar{X}$ -Karte aufstellen, so benötigt man die Werte von  $\mu$  und  $\sigma$ . Dies zeigen die Gleichungen (2.28), (2.29) und (2.30) auf Seite 37 für  $n = 1$  und Gleichungen (2.33), (2.34) und (2.35) auf Seite 38 für  $n > 1$ . Diese Parameter sind in der Regel unbekannt und müssen geschätzt werden. Hierzu beobachten wir den Prozess an  $T$  Zeitpunkten und bestimmen dann mit den geschätzten Parametern die Grenzen der Karte. Anschließend wird mit den Werten, aus denen die Parameter geschätzt wurden, überprüft, ob der Prozess unter Kontrolle ist. Ist dies der Fall, so kann man die Karte übernehmen.

Wir wollen im Folgenden zwei Karten erstellen. Mit der  $\bar{X}$ -Karte überprüft man die Lage des Prozesses und mit der  $R$ -Karte die Streuung. Dabei erheben wir zu  $T$  Zeitpunkten entweder eine Beobachtung oder  $n$  Beobachtungen mit  $n > 1$ . Die Schätzung der Parameter ist für die beiden Situationen unterschiedlich.

#### 2.4.4.1 Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n > 1$

Wir wollen die  $\bar{X}$ -Karte für  $n > 1$  aufstellen. Hierzu müssen wir  $\mu$  und  $\sigma$  schätzen. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  beobachten wir  $n$  Realisationen des interessierenden Merkmals. Sei  $x_{tj}$  der Wert der  $j$ -ten Beobachtung zum Zeitpunkt  $t$ .

##### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Ein Bäcker bestimmt nach jedem Backvorgang das Gewicht von 2 Brötchen. Bei 20 Backvorgängen erhält er die Werte in Tabelle 2.2 auf Seite 37.

Beginnen wir mit der Schätzung von  $\mu$ . Für jede Stichprobe berechnen wir den Mittelwert

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} \quad (2.42)$$

##### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Es gilt  $x_{11} = 72$  und  $x_{12} = 70$ . Hieraus folgt

$$\bar{x}_1 = \frac{72 + 70}{2} = 71$$

Analog erhalten wir die anderen Werte. In der vierten Spalte von Tabelle 2.4 auf Seite 51 sind die Mittelwert der Stichproben zu finden.

Tabelle 2.4: Hilfstabelle zur Erstellung einer Qualitätsregelkarte

| $t$ | $x_{t1}$ | $x_{t2}$ | $\bar{x}_t$ | $R_t$ |
|-----|----------|----------|-------------|-------|
| 1   | 72       | 70       | 71.0        | 2     |
| 2   | 72       | 66       | 69.0        | 6     |
| 3   | 69       | 67       | 68.0        | 2     |
| 4   | 70       | 72       | 71.0        | 2     |
| 5   | 68       | 70       | 69.0        | 2     |
| 6   | 71       | 69       | 70.0        | 2     |
| 7   | 69       | 66       | 67.5        | 3     |
| 8   | 66       | 72       | 69.0        | 6     |
| 9   | 67       | 71       | 69.0        | 4     |
| 10  | 74       | 66       | 70.0        | 8     |
| 11  | 72       | 72       | 72.0        | 0     |
| 12  | 71       | 71       | 71.0        | 0     |
| 13  | 69       | 67       | 68.0        | 2     |
| 14  | 70       | 72       | 71.0        | 2     |
| 15  | 71       | 72       | 71.5        | 1     |
| 16  | 69       | 69       | 69.0        | 0     |
| 17  | 72       | 75       | 73.5        | 3     |
| 18  | 71       | 68       | 69.5        | 3     |
| 19  | 74       | 68       | 71.0        | 6     |
| 20  | 72       | 68       | 70.0        | 4     |

Aus  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_T$  berechnen wir

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{x}_t \quad (2.43)$$

Dies ist gleich dem Mittelwert aller Beobachtungen:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{x}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} = \frac{1}{n \cdot T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n x_{tj}$$

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Es gilt

$$\bar{\bar{x}} = \frac{71 + 69 + 68 + \dots + 71.0 + 70.0}{20} = 70$$

Nun benötigen wir noch einen Schätzer für  $\sigma$ . Hierzu schätzen wir zuerst  $\sigma$  für jede Stichprobe. Wir können die Stichprobenstandardabweichung oder die Spannweite als Schätzer von  $\sigma$  wählen. Wir schauen uns hier die Spannweite an:

$$R_t = \max\{x_{t1}, \dots, x_{tn}\} - \min\{x_{t1}, \dots, x_{tn}\} \quad (2.44)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Es gilt  $x_{11} = 72$  und  $x_{12} = 70$ . Hieraus folgt

$$R_1 = 72 - 70 = 2$$

Analog erhalten wir die anderen Werte. In der fünften Spalte von Tabelle 2.4 auf Seite 51 sind die Spannweiten der Stichproben zu finden.

Wie bei den Mittelwerten der Stichproben bestimmen wir nun den Mittelwert der Spannweiten.

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t. \quad (2.45)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$\bar{R} = \frac{2 + 6 + 2 + \dots + 6 + 4}{20} = 2.9$$

Nun ist  $\bar{R}$  keine erwartungstreue Schätzfunktion von  $\sigma$  bei Normalverteilung. Ein bei Normalverteilung erwartungstreuer Schätzer von  $\sigma$ , der auf  $\bar{R}$  beruht, ist

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (2.46)$$

Wie man die Konstante  $d_2$  bestimmt, wird in Kapitel 2.4.4.3 gezeigt. Die Werte von  $d_2$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden.

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Für  $n = 2$  gilt  $d_2 = 1.128$ . Also erhalten wir

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{2.9}{1.128} = 2.57.$$

Mit Hilfe von  $\bar{\bar{x}}$  und  $\bar{\bar{R}}$  können wir die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte und der  $R$ -Karte bestimmen. Hierzu schätzen wir  $\mu$  durch  $\bar{\bar{x}}$  und  $\sigma$  durch  $\bar{\bar{R}}/d_2$ .

Die geschätzten Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = \bar{\bar{x}} - 3 \cdot \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \quad (2.47)$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \quad (2.48)$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3 \cdot \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \quad (2.49)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Die geschätzten Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = 70 - 3 \cdot \frac{2.57}{\sqrt{2}} = 64.55$$

$$CL = 70$$

$$UCL = 70 + 3 \cdot \frac{2.57}{\sqrt{2}} = 75.45$$

Wir können die Grenzen noch anders darstellen. Sei

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \cdot \sqrt{n}}.$$

In Abhängigkeit von  $A_2$  lauten die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte:

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}}$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}}$$

Die Werte von  $A_2$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden.

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

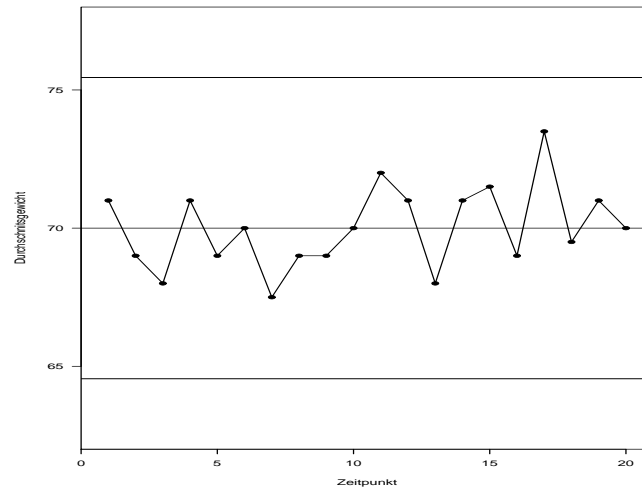
Für  $n = 2$  gilt  $A_2 = 1.88$ . Wir bestätigen die Werte der Grenzen

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}} = 70 - 1.88 \cdot 2.9 = 64.55$$

$$CL = \bar{\bar{x}} = 70$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} = 70 + 1.88 \cdot 2.9 = 75.45$$

Abbildung 2.16 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 2.16:  $\bar{X}$ -Karte für das Gewicht der Brötchen

Um die Streuung zu überprüfen, benutzen wir die Spannweite  $R$  einer Stichprobe vom Umfang  $n$ . Die Grenzen der Karte sind

$$LCL = E(R) - 3 \cdot \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (2.50)$$

$$CL = E(R) \quad (2.51)$$

$$UCL = E(R) + 3 \cdot \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (2.52)$$

Wir benötigen erwartungstreue Schätzer von  $E(R)$  und  $\sqrt{\text{Var}(R)}$ . Offensichtlich ist  $\bar{R}$  eine erwartungstreue Schätzfunktion von  $E(R)$ .

Eine erwartungstreue Schätzfunktion für  $\sqrt{\text{Var}(R)}$  ist

$$\frac{d_3}{d_2} \bar{R}$$

Die Konstanten  $d_2$  und  $d_3$  sind in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden. Die Herleitung der Konstanten ist in Kapitel 2.4.4.3 ab Seite 59 zu finden.

Wir erhalten also folgende geschätzte Grenzen für die  $R$ -Karte:

$$LCL = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (2.53)$$

$$CL = \bar{R} \quad (2.54)$$

$$UCL = \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (2.55)$$

Wir können die Grenzen in den Gleichungen (2.53) und (2.55) noch vereinfachen und erhalten:

$$LCL = D_3 \bar{R} \quad (2.56)$$

$$UCL = D_4 \bar{R} \quad (2.57)$$

Dabei gilt

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$$

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

Die Werte von  $D_3$  und  $D_4$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden.

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Es gilt  $\bar{R} = 2.9$ . Für  $n = 2$  gilt  $D_3 = 0$  und  $D_4 = 3.267$ . Somit erhalten wir

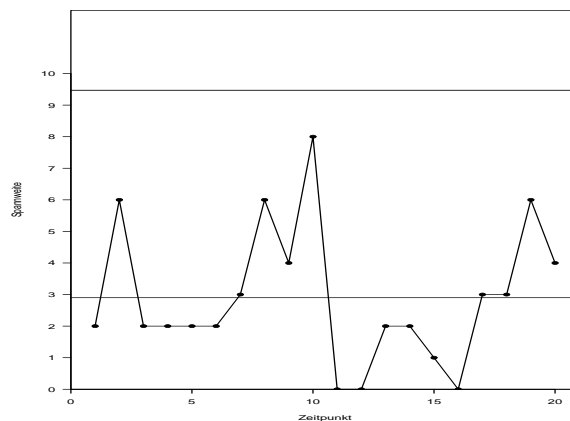
$$LCL = D_3 \bar{R} = 0 \cdot 2.9 = 0$$

$$CL = \bar{R} = 2.9$$

$$UCL = D_4 \bar{R} = 3.267 \cdot 2.9 = 9.47$$

Abbildung 2.17 zeigt die  $R$ -Karte.

Abbildung 2.17:  $R$ -Karte für das Gewicht der Brötchen



Bei beiden Karten sind die Prozesse unter Kontrolle, sodass die Karten benutzt werden können.



**2.4.4.2 Die  $\bar{X}/R$ -Karte für  $n = 1$** 

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wird genau ein Wert beobachtet. Es fallen also die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_T$  an.

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Ein Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Den Erwartungswert  $\mu$  schätzen wir durch den Mittelwert aller Beobachtungen

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad (2.58)$$

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt  $\bar{x} = 30$ .

Nun benötigen wir noch einen Schätzer für  $\sigma$ . Bei mehr als einer Beobachtung je Zeitpunkt berechnen wir die Spannweite dieser Beobachtungen. Für  $n = 1$  ist die Spannweite gleich 0. Um einen sinnvollen Wert für die Spannweite zu erhalten, benötigen wir mehr als eine Beobachtung. Dies ist möglich, wenn man die Spannweite aus benachbarten Beobachtungen berechnet. Sind also  $x_1, \dots, x_T$  die Werte des Prozesses, so betrachtet man die Paare  $(x_{t-1}, x_t)$  für  $t = 2, \dots, T$ . Für jedes Paar bestimmt man den Wert der Spannweite  $R_t = \max\{X_{t-1}, X_t\} - \min\{X_{t-1}, X_t\} = |X_t - X_{t-1}|$  für  $t = 2, \dots, T$ . Man spricht auch vom Moving-Range. Dann bestimmt man den Mittelwert  $\bar{R}$  der  $R_t$ :

$$\bar{R} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T R_t.$$

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt  $R_2 = |x_2 - x_1| = 3$ . Die anderen Werte sind entsprechend

3 6 1 0 2 4 1 4 6 3 0 1 1 2 4 2 2 1 2

Es gilt  $\bar{R} = 2.37$ .

Einen erwartungstreuen Schätzer für  $\sigma$  erhält man dann durch  $\bar{R}/d_2$ . Da wir die Spannweite aus jeweils zwei Beobachtungen bestimmt haben, wählen wir  $d_2 = 1.128$ .

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 2.1$ .

Anstatt zwei aufeinander folgenden Beobachtungen könnte man natürlich im Zeitpunkt  $t$  auch drei aufeinander folgende Beobachtungen  $(x_{t-2}, x_{t-1}, x_t)$  bestimmen. Wir erhalten dann  $n - 2$  Spannweiten und dividieren deren Mittelwert durch  $d_2 = 1.693$ .

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Die ersten drei Beobachtungen sind 29, 32 und 26. Also gilt  $R_1 = 6$ . Alle Werte sind

6 6 1 2 6 4 5 6 6 3 1 1 3 4 4 2 3 2

Es gilt  $\bar{R} = 3.611$  und somit  $\hat{\sigma} = 3.611/1.693 = 2.13$ . Wir sehen, dass die Schätzung von  $\sigma$ , die auf der Spannweite von zwei Beobachtungen basiert, nahezu identisch mit der Schätzung von  $\sigma$  ist, die auf der Spannweite von drei Beobachtungen basiert

Wir verwenden im Folgenden die Schätzung von  $\sigma$ , die auf der Spannweite von zwei Beobachtungen basiert.

Da wir zu jedem Zeitpunkt nur eine Beobachtung erhoben haben, erhalten wir folgende Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte:

$$LCL = \bar{x} - 3\hat{\sigma}$$

und

$$UCL = \bar{x} + 3\hat{\sigma}$$

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt

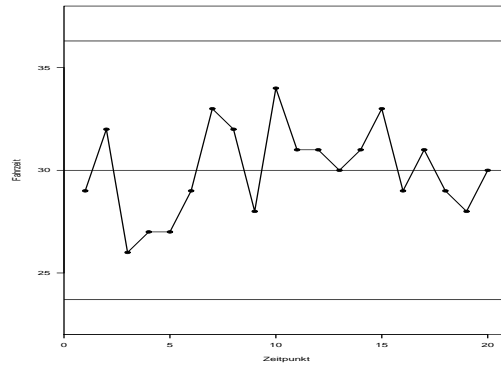
$$LCL = \bar{x} - 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 30 - 3 \cdot 2.1 = 23.7$$

und

$$UCL = \bar{x} + 3\frac{\bar{R}}{d_2} = 30 + 3 \cdot 2.1 = 36.3.$$

Außerdem gilt  $CL = 30$ . Abbildung 2.18 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 2.18:  $\bar{X}$ -Karte für die Fahrzeit



Wir können die Moving ranges auch benutzen, um die Streuung des Prozesses zu überprüfen. Hiermit kann man aber erst im Zeitpunkt  $t = 2$  beginnen. Hier bestimmt man  $R_2 = |x_2 - x_1|$ . Die anderen Spannweiten sind  $R_t = |x_t - x_{t-1}|$ . Die Grenzen der Karten sind dann in den Gleichungen (2.56) und (2.57) auf der Seite 55 zu finden. Für  $n = 2$  gilt  $D_3 = 0$  und  $D_4 = 3.267$ .

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt

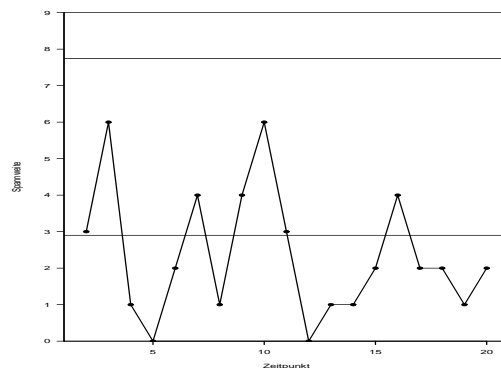
$$LCL = 0 \cdot 2.37 = 0$$

und

$$UCL = 3.267 \cdot 2.37 = 7.74.$$

Außerdem gilt  $CL = 2.32$ . Abbildung 2.19 zeigt die  $R$ -Karte.

Abbildung 2.19:  $R$ -Karte für die Fahrzeit



### 2.4.4.3 Die Bestimmung der Konstanten

Müssen  $\mu_T$  und  $\sigma_T$  bei der  $\bar{X}$ -Karte oder der  $R$ -Karte geschätzt werden, so hängen der  $LCL$  und der  $UCL$  von Konstanten wie  $d_2$  und  $A_2$  ab. Im Folgenden werden wir lernen, was diese Konstanten bedeuten. Beginnen wir mit der  $\bar{X}$ -Karte. Die Grenzen sind

$$LCL = \bar{\bar{x}} - 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \cdot \bar{R} \quad (2.59)$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \quad (2.60)$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \cdot \bar{R} \quad (2.61)$$

Wir dividieren  $\bar{R}$  durch die Konstante  $d_2$ , um eine bei Normalverteilung erwartungstreue Schätzung zu erhalten. Es gilt

$$E(\bar{R}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(R_t)$$

Der Erwartungswert von  $\bar{R}$  hängt von den Erwartungswerten  $E(R_t)$  ab. Da wir annehmen, dass die Zufallsvariablen  $X_{tj}$  unabhängig und identisch mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  normalverteilt sind, sind auch die Zufallsvariablen  $R_1, \dots, R_T$  unabhängig und identisch verteilt. Es reicht also aus, den Erwartungswert und die Varianz von  $R_t$  zu bestimmen. Wir betrachten also im Folgenden die Spannweite  $R_X = X_{(n)} - X_{(1)}$  einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n$  aus einer Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Es gilt

$$E(R_X) \neq \sigma$$

Also gilt auch

$$E(\bar{R}) \neq \sigma$$

Warum ist  $R_X$  nicht erwartungstreu für  $\sigma$ ?

Ist die Zufallsvariablen  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  normalverteilt, so ist die Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

Für die Spannweite von  $Z$  gilt

$$R_Z = Z_{(n)} - Z_{(1)} = \frac{X_{(n)} - \mu}{\sigma} - \frac{X_{(1)} - \mu}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\sigma} = \frac{R_X}{\sigma} \quad (2.62)$$

Es gilt also

$$R_X = \sigma R_Z \quad (2.63)$$

und somit

$$E(R_X) = E(R_Z) \sigma \quad (2.64)$$

Den Wert von  $E(R_Z)$  kann man mit numerischer Integration oder auch mit Simulation bestimmen. Wir bezeichnen ihn mit  $d_2$ . In Tabelle B.1 sind die Werte von  $d_2$  für  $n = 2, 3, \dots, 10$  zu finden.

Wir sehen, dass  $E(R_Z)$  ungleich 0 ist. Somit ist  $\bar{R}$  nicht erwartungstreu für  $\sigma$ .

Gleichung(2.63) zeigt aber, wie man einen erwartungstreuen Schätzer von  $\sigma$  auf Basis von  $R_X$  erhält. Wir dividieren  $R_X$  durch  $E(R_Z)$ :

$$\hat{\sigma} = \frac{R_X}{E(R_Z)} \quad (2.65)$$

Es gilt

$$E(\hat{\sigma}) = E\left(\frac{R_X}{E(R_Z)}\right) = \frac{1}{E(R_Z)} E(R_X) \stackrel{(2.64)}{=} \frac{1}{E(R_Z)} E(R_Z) \sigma = \sigma$$

Setzen wir in den Gleichungen (2.59) und (2.61) auf Seite 59

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}},$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R} \\ UCL &= \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R} \end{aligned}$$

Die Werte von  $A_2$  sind in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden.

Bisher haben wir  $Var(R_X)$  noch nicht benötigt. Bei der  $R$ -Karte ist dies aber der Fall. Die Grenzen der  $R$ -Karte sind

$$\begin{aligned} LCL &= D_3 \cdot \bar{R} \\ CL &= \bar{R} \\ UCL &= D_4 \cdot \bar{R} \end{aligned}$$

Schauen wir uns an, wie man diese Grenzen gewinnt. Mit  $T = R_X$  lauten die Grenzen der  $R$ -Karte

$$LCL = E(R_X) - 3\sqrt{Var(R_X)}$$

und

$$UCL = E(R_X) + 3\sqrt{Var(R_X)}$$

Als Schätzer für  $E(R_X)$  wählen wir  $\bar{R}$ . Wir benötigen noch einen Schätzer für  $\sigma_{R_X} = \sqrt{Var(R_X)}$ . Aus Gleichung (2.63) folgt

$$Var(R_X) \stackrel{(2.63)}{=} Var(\sigma R_Z) = \sigma^2 Var(R_Z) \quad (2.66)$$

und somit

$$\sigma_{R_X} = \sigma \sigma_{R_Z} \quad (2.67)$$

Da  $\sigma$  unbekannt ist, schätzen wir es durch

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Wir setzen  $d_3 = \sigma_{R_Z}$ . Die Werte von  $d_3$  sind in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden. Somit gilt

$$\hat{\sigma}_{R_X} = \hat{\sigma} d_3 = \frac{\bar{R}}{d_2} d_3 = \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (2.68)$$

Somit erhalten wir folgende Grenzen auf Basis der geschätzten Parameter:

$$LCL = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_3 \bar{R}$$

und

$$UCL = \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_4 \bar{R}$$

Die Werte von  $D_3$  und  $D_4$  sind in Tabelle B.1 auf Seite 180 zu finden.

### 2.4.5 Qualitätsregelkarten für Zählvariablen

Bis jetzt haben wir Qualitätsregelkarten für stetige Merkmale erhoben. Oft betrachtet man aber eine Zählvariable. Ein Verteilungsmodell für Zählvariablen ist die Poissonverteilung. Eine mit dem Parameter  $\lambda$  poissonverteilte Zufallsvariable  $X$  besitzt für  $x = 1, 2, \dots$  folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (2.69)$$

Es gilt

$$E(X) = \lambda \quad (2.70)$$

und

$$Var(X) = \lambda \quad (2.71)$$

In der Regel werden zu jedem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n = 1$  ziehen. Dann ist  $W_t = X_t$  mit

$$\mu_W = E(X) = \lambda \quad (2.72)$$

und

$$\sigma_W^2 = Var(X) = \lambda \quad (2.73)$$

Setzen wir die Gleichungen (2.72) und (2.73) in die Gleichungen (2.23) und (2.24) auf Seite 34 ein, so erhalten wir die Grenzen:

$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}$$

$$CL = \lambda$$

$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$

Ist der Parameter  $\lambda$  unbekannt, so schätzen wir ihn durch  $\bar{x}$  und erhalten folgende Grenzen:

$$LCL = \bar{x} - 3\sqrt{\bar{x}}$$

$$CL = \bar{x}$$

$$UCL = \bar{x} + 3\sqrt{\bar{x}}$$

Man bezeichnet die Karte auch als  $c$ -Karte.

### Beispiel 5

Ein Arzt bestimmt an 20 aufeinanderfolgenden Tagen die Anzahl der Patienten, die seine Praxis aufsuchen. Er erhält folgende Werte:

56 58 38 53 69 37 53 45 44 55 45 44 41 50 34 51 48 51 61 47

Es gilt  $\bar{x} = 49$ . Also lauten die Grenzen der  $c$ -Karte

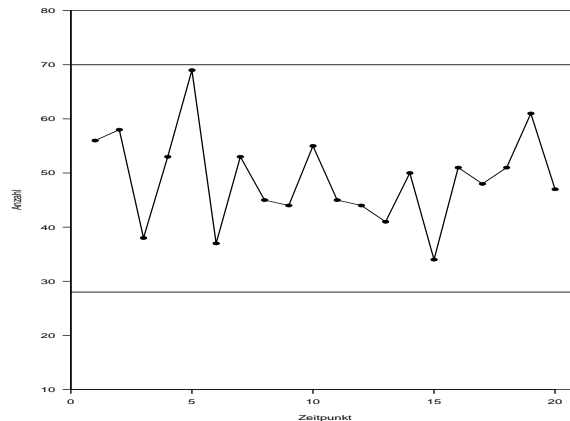
$$LCL = 49 - 3 \cdot 7 = 28$$

$$CL = 49$$

$$UCL = 49 + 3 \cdot 7 = 70$$

Abbildung 2.20 zeigt die Qualitätsregelkarte. Der Prozess ist unter Kontrolle.

Abbildung 2.20: Qualitätsregelkarte einer Zählvariablen



### 2.4.6 Einige Fragen zu Qualitätsregelkarten

Wir wollen im Folgenden einige Fragen beantworten die sich mit praktischen Problemen bei Qualitätsregelkarten beschäftigen.

#### Frage 1

Warum ist es sinnvoll, die Entscheidung über die Stabilität des Prozesses auf Basis mehrerer Beobachtungen zu fällen?

1. Die Grenzen basieren auf der Annahme, dass die Stichprobenfunktion normalverteilt ist. Für die Stichprobenfunktion  $\bar{X}$  ist dies auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes der Fall, wenn  $n$  hinreichend groß ist.
2. Die Gütefunktion  $G(\mu_1)$  ist monoton wachsend in  $n$ . Je größer der Stichprobenumfang ist, um so größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, eine Lageverschiebung zum Wert  $\mu_1$  zu entdecken. Wegen

$$ARL = \frac{1}{G(\mu_1)}$$

nimmt die mittlere Wartezeit bis zum Entdecken der Lageverschiebung mit wachsendem  $n$  ab.



3. Man erhält einen lokalen Schätzer der Standardabweichung. Dazu mehr in der Antwort zur zweiten Frage.

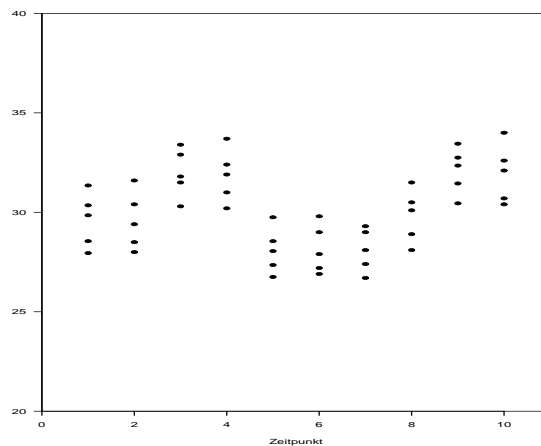
## Frage 2

Warum schätzt man die Standardabweichung nicht aus allen  $T \cdot n$  Beobachtungen?

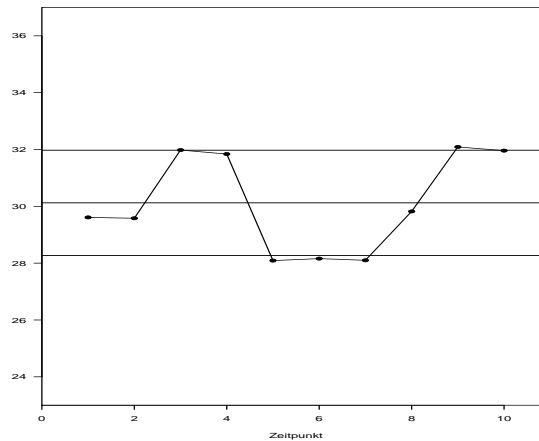
Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  werden geschätzt, um die Grenzen der Karte aufzustellen. Im Schätzzeitraum sollte der Prozess natürlich unter Kontrolle sein, damit man die richtigen Grenzen verwendet. Dies bedeutet aber auch, dass die Karte im Schätzzeitraum merken sollte, wenn der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 2.21 zeigt einen Prozess, bei dem sich das Niveau immer wieder ändert. Es ist offensichtlich hinsichtlich der Lage nicht unter Kontrolle.

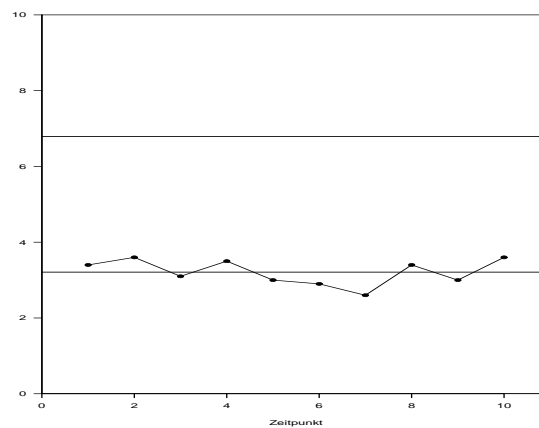
Abbildung 2.21: Prozess mit unstabilem Niveau



Wir betrachten zwei unterschiedliche Schätzer der Standardabweichung  $\sigma$ . Wir verwenden das in Kapitel 2.4.4.1 beschriebene Verfahren, d.h. wir benutzen die Gleichung 2.46 auf Seite 52. Wir erhalten die  $\bar{X}$ -Karte in Abbildung 2.22. Die Abbildung zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte entdeckt, dass das Niveau des Prozesses nicht unter Kontrolle ist.

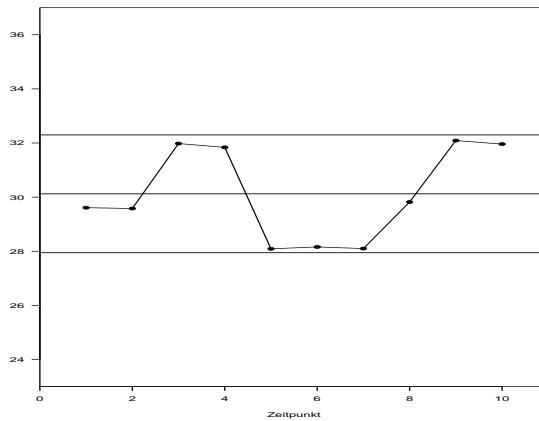
Abbildung 2.22:  $\bar{X}$ -Karte

Die  $R$ -Karte in Abbildung 2.23 zeigt, dass die Variabilität des Prozesses unter Kontrolle ist.

Abbildung 2.23:  $R$ -Karte

Schätzt man hingegen die Standardabweichung aus der Spannweite aller 50 Beobachtungen, so überschätzt man sie. Abbildung 2.24 zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte in diesem Fall nicht entdeckt, dass das Niveau des Prozesses nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 2.24:  $\bar{X}$ -Karte



### 2.4.7 Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis

Die Tabelle mit den *ARL*-Werten zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte kleine Lageunterschiede nicht schnell aufdecken kann. Das folgende Beispiel bestätigt dies.

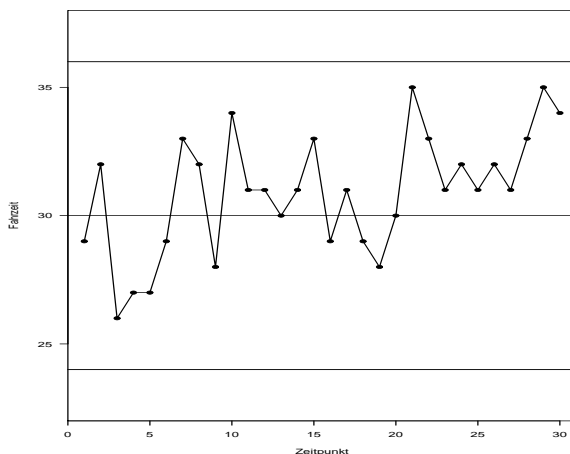
#### Beispiel 6

Wir betrachten wieder die Fahrzeit des Arbeitnehmers. Wir gehen davon aus, dass der Erwartungswert und die Varianz der Fahrzeit bekannt sind. Es gelte  $\mu = 30$  und  $\sigma^2 = 4$ . Da zu jedem Zeitpunkt nur ein Wert erhoben wird, gilt  $LCL = 24$  und  $UCL = 36$ .

Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugen wir 30 normalverteilte Zufallszahlen, wobei die ersten 20 Zufallszahlen aus der Normalverteilung mit Erwartungswert 30 und Standardabweichung 2 und die letzten 10 Beobachtungen aus der Normalverteilung mit Erwartungswert 32 und Standardabweichung 2 stammen. Hier sind die gerundeten Werte:

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33  
 29 31 29 28 30 35 33 31 32 31 32 31 33 35 34

Abbildung 2.25 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 2.25:  $\bar{X}$ -Karte

Die Karte deutet darauf hin, dass der Prozess unter Kontrolle ist. Wir wissen aber, dass dies nicht der Fall ist. Wir würden hier also einen Fehler 2. Art begehen. Die Lage hat sich bei der 21-ten Stichprobe zum Wert  $\mu = 32$  verschoben. Dies ist eine Lageverschiebung um  $1\sigma$ . Die  $ARL$  der  $\bar{X}$ -Karte beträgt in diesem Fall 43.9.

Die  $\bar{X}$ -Karte bemerkt deshalb kleine Lageunterschiede nicht, da die Entscheidung nur auf einer Stichprobe beziehungsweise einer Beobachtung basiert. Berücksichtigt man hingegen die Information aufeinander folgender Stichproben, so entdeckt man den kleinen Lageunterschied viel schneller. So liegen die letzten 10 Beobachtungen in Abbildung 2.25 oberhalb der Mittellinie. Wendet man die vierte der Western Electric Regeln an, so bemerkt man, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten, die Information aufeinander folgender Beobachtungen zu berücksichtigen. Dies geschieht bei Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis. Zu diesen gehören die  $CUSUM$ -Karte und die  $EWMA$ -Karte.

Wir wollen uns im Folgenden nur mit der  $EWMA$ -Karte beschäftigen.

#### 2.4.7.1 Die $EWMA$ -Karte

Wir gehen zunächst davon aus, dass der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  des Prozesses bekannt sind, wenn dieser unter Kontrolle ist. Wir bezeichnen den Lageparameter mit  $\mu_0$ . Außerdem gehen wir von  $n = 1$  aus.

Die EWMA-Karte beruht auf der exponentiellen Glättung erster Ordnung. Bei dieser geht man von einer Zeitreihe  $x_1, x_2, \dots$  aus. Ziel ist es, im Zeitpunkt  $t$  den Wert  $x_{t+1}$  durch einen Wert  $\hat{x}_{t+1}$  zu prognostizieren. Für diese Prognose verwendet man den im Zeitpunkt  $t$  beobachteten Wert  $x_t$  und den im Zeitpunkt  $t - 1$  erstellten Prognosewert  $\hat{x}_t$ . Um  $x_{t+1}$  zu prognostizieren, korrigiert man die Prognose  $\hat{x}_t$  um den Prognosefehler  $x_t - \hat{x}_t$ :

$$\hat{x}_{t+1} = \underbrace{\hat{x}_t}_{\text{Prognose in } t-1} + \underbrace{(x_t - \hat{x}_t)}_{\text{Prognosefehler}}$$

### Beispiel 7

Ist  $\hat{x}_t = 100$  und  $x_t = 130$ , so gilt

$$x_t - \hat{x}_t = 130 - 100 = 30$$

Wir prognostizieren  $x_{t+1}$  also durch

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + (x_t - \hat{x}_t) = 100 + (130 - 100) = 130$$

Wir sehen, dass wir  $x_{t+1}$  durch  $x_t$  prognostizieren. Die Erfahrung lehrt, dass man bei der Korrektur nur einen Teil  $\lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t)$  des Prognosefehlers berücksichtigen sollte. Dies führt zu folgender Prognose:

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t) \tag{2.74}$$

Verwendet man den Ausdruck in Gleichung (2.74) zur Prognose, so spricht man von exponentieller Glättung 1. Ordnung. Man kann den Ausdruck in Gleichung (2.74) noch folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= \hat{x}_t + \lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t) = \hat{x}_t + \lambda \cdot x_t - \lambda \cdot \hat{x}_t \\ &= \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot \hat{x}_t \end{aligned} \tag{2.75}$$

Wir prognostizieren  $x_{t+1}$  also durch eine konvexe Linearkombination aus  $x_t$  und  $\hat{x}_t$ . Dabei ist  $\lambda$  das Gewicht der aktuellen Beobachtung  $x_t$  und  $(1 - \lambda)$  das Gewicht von der Prognose in  $t - 1$ .

Die EWMA-Karte basiert auf der exponentiellen Glättung erster Ordnung. Ausgehend von einem Startwert  $z_0$  wird in jedem Zeitpunkt  $t$  mit Hilfe der exponentiellen Glättung erster Ordnung ein Schätzwert von  $x_{t+1}$  bestimmt. Diesen bezeichnet man mit  $z_t$ . Wir ersetzen in Gleichung (2.75) also  $\hat{x}_{t+1}$  durch  $z_t$  und  $\hat{x}_t$  durch  $z_{t-1}$  und erhalten folgende Gleichung

$$z_t = \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot z_{t-1} \tag{2.76}$$

Dabei gilt  $0 \leq \lambda \leq 1$ . In der Regel setzt man  $z_0 = \mu_0$ .  
Schauen wir uns an, wie sich  $z_t$  entwickelt.

Für  $t = 1$  gilt

$$z_1 = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot z_0 \quad (2.77)$$

**Beispiel 7 (fortgesetzt)**

Wir wählen  $\lambda = 0.2$ . Mit  $z_0 = 30$  gilt

$$z_1 = 0.2 \cdot 29 + 0.8 \cdot 30 = 29.8$$

Für  $t = 2$  gilt

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot z_1 \stackrel{(2.77)}{=} \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot [\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot z_0] \\ &= \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^2 \cdot z_0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

**Beispiel 7 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$z_2 = 0.2 \cdot 32 + 0.8 \cdot 29.8 = 30.24$$

Für  $t = 3$  gilt

$$\begin{aligned} z_3 &= \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot z_2 \\ &\stackrel{(2.78)}{=} \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot [\lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^2 \cdot z_0] \\ &= \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda)^2 \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^3 \cdot z_0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

**Beispiel 7 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$z_3 = 0.2 \cdot 26 + 0.8 \cdot 30.24 = 29.392$$

An Gleichung (2.79) auf Seite 69 kann man schon die allgemeine Struktur erkennen. Es gilt

$$\begin{aligned} z_t &= \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + \dots + (1 - \lambda)^{t-1} \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^t \cdot z_0 \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j x_{t-j} + (1 - \lambda)^t \cdot z_0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

**Beispiel 7 (fortgesetzt)**

Wir erhalten folgende 30 Werte

29.800 30.240 29.392 28.914 28.531 28.625 29.500 30.000  
 29.600 30.480 30.584 30.667 30.534 30.627 31.102 30.681  
 30.745 30.396 29.917 29.933 30.947 31.357 31.286 31.429  
 31.343 31.474 31.380 31.704 32.363 32.690

An Gleichung (2.80) können wir folgendes erkennen:

1. Wir erhalten  $z_t$  als Linearkombination des aktuellen Wertes  $x_t$  und aller vergangenen Werte  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ . Dabei wird die aktuelle Beobachtung mit  $\lambda$  gewichtet. Je größer  $\lambda$  ist, um so stärker wird also auch die aktuelle Beobachtung gewichtet. Die Gewichte der  $x_t$  bilden eine geometrische Folge. Je mehr Zeit seit der Erhebung einer Beobachtung vergangen ist, um so geringer ist ihr Gewicht. Deshalb heißt die Qualitätsregelkarte auch EWMA-Karte. Dies steht für exponentially weighted moving average und bedeutet exponentiell gewichteter Mittelwert.
2. das Gewicht von  $z_0$  beträgt  $(1 - \lambda)^t$ . Dieses wird mit wachsendem  $t$  immer kleiner. Für große Werte von  $t$  hängt  $z_t$  nur noch marginal von  $z_0$  ab.

Um die Qualitätsregelkarte aufstellen zu können, benötigen wir  $E(Z_t)$  und  $Var(Z_t)$ . Die Grenzen der Karte sind dann

$$\begin{aligned} LCL &= E(Z_t) - L \cdot \sqrt{Var(Z_t)} \\ UCL &= E(Z_t) + L \cdot \sqrt{Var(Z_t)} \end{aligned}$$

Ist der Prozess unter Kontrolle, so gilt  $E(X_t) = \mu_0$  für alle  $t$ . Hieraus folgt

$$E(Z_t) = \mu_0 \quad (2.81)$$

Der Beweis ist auf Seite 170 zu finden.

Nun benötigen wir noch  $Var(Z_t)$ . Wenn wir davon ausgehen, dass die  $X_t$  unabhängig mit identischer Varianz  $\sigma^2$  sind, dann gilt

$$Var(Z_t) = \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \quad (2.82)$$

Der Beweis ist auf Seite 171 zu finden.

Die Grenzen der EWMA-Karte sind also

$$LCL = \mu_0 - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (2.83)$$

$$CL = \mu_0 \quad (2.84)$$

$$UCL = \mu_0 + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (2.85)$$

Bei der EWMA-Karte müssen wir Werte für  $\lambda$  und  $L$  festlegen. Bevor wir näher auf die geeignete Wahl dieser Größen eingehen, schauen wir uns am Beispiel an, wie man die Grenzen der Karte bestimmt.

**Beispiel 7 (fortgesetzt)**

Wir setzen  $L = 3$ . Mit  $\mu_0 = 30$ ,  $\sigma = 2$  und  $\lambda = 0.2$  gilt für  $t = 1$

$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^2]} = 28.8$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^2]} = 31.2$$

Für  $t = 2$  gilt

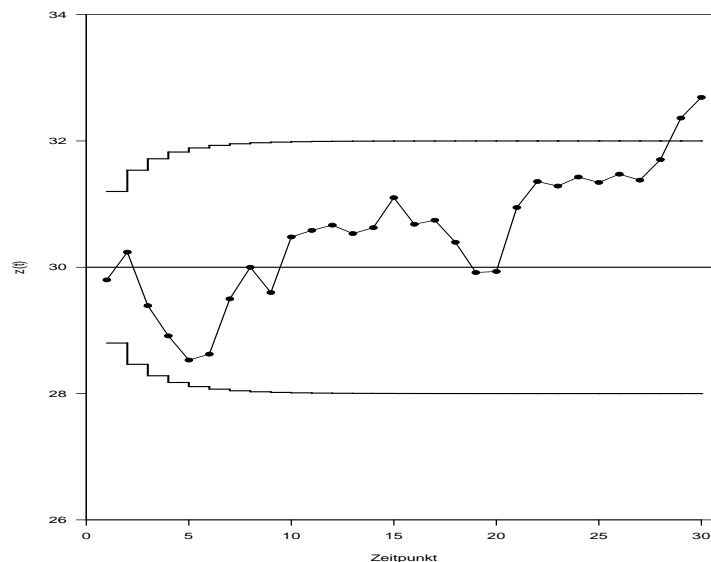
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^4]} = 28.46$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^4]} = 31.54$$

Abbildung 2.26 zeigt die EWMA-Karte. Im Gegensatz zur  $\bar{X}$ -Karte signalisiert sie, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 2.26: EWMA-Karte





Wir sehen, dass die Grenzen der EWMA-Karte mit wachsendem  $t$  immer stabiler werden. Dies ist kein Zufall. Aus  $0 \leq \lambda \leq 1$  folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \lambda)^{2-t} = 0 \quad (2.86)$$

Also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(Z_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2-t}] = \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda}$$

Die approximativen Grenzen der EWMA-Karte sind also

$$LCL = \mu_0 - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (2.87)$$

$$CL = \mu_0 \quad (2.88)$$

$$UCL = \mu_0 + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (2.89)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Es gilt

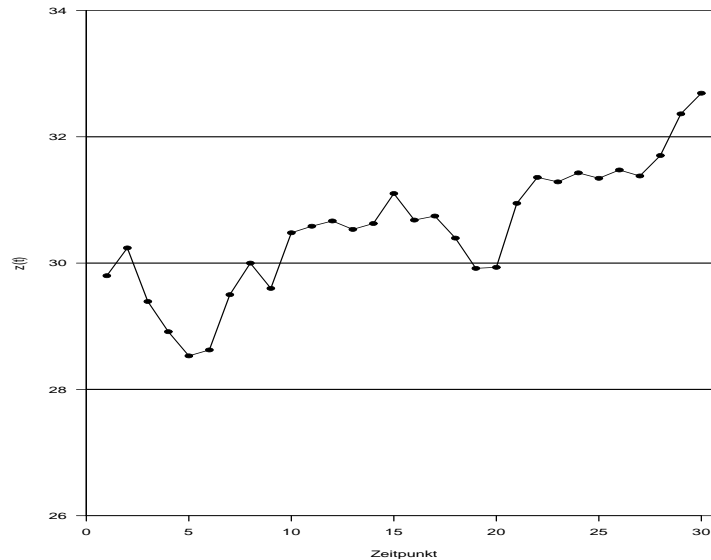
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = 28$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = 32$$

Abbildung 2.27 zeigt die EWMA-Karte mit approximativen Grenzen. Im Gegensatz zur  $\bar{X}$ -Karte signalisiert sie, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 2.27: EWMA-Karte mit approximativen Grenzen



Die exakten Grenzen sind am Anfang enger als die approximativen. Montgomery empfiehlt, mit den exakten Grenzen zu arbeiten, wenn man eine Karte erstellt, da man dann eher bemerkt, wenn der Prozess zu Beginn nicht unter Kontrolle ist.

Wodurch unterscheiden sich die  $\bar{X}$ -Karte und die EWMA-Karte? Wir betrachten den Fall  $n = 1$ .

Bei der  $\bar{X}$ -Karte trägt man die Beobachtungen ab, bei der EWMA-Karte hingegen die mit der exponentiellen Glättung gewonnenen Prognosewerte  $z_t$ . Die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = \mu - K \cdot \sigma$$

$$UCL = \mu + K \cdot \sigma$$

Die approximativen Grenzen der EWMA-Karte sind

$$LCL = \mu - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

$$UCL = \mu + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

Ist  $K = L$  und  $\lambda = 1$ , so sind die  $\bar{X}$ -Karte und die EWMA-Karte identisch.

Ist  $K = L$  und  $\lambda < 1$ , so sind die Grenzen der EWMA-Karte enger als die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte.

Die EWMA-Karte entdeckt kleine Lageunterschiede schneller als die  $\bar{X}$ -Karte. Für  $\lambda = 1$  ist die EWMA-Karte mit der  $\bar{X}$ -Karte identisch. Also sollte  $\lambda$  klein sein. Außerdem sollte  $L$  so gewählt werden, dass die  $ARL_0$  der EWMA-Karte mit der  $ARL_0$  der  $\bar{X}$ -Karte übereinstimmt. Leider kann man die  $ARL$  der EWMA-Karte nicht so einfach bestimmen. Mit Hilfe numerischer Verfahren ist dies möglich. In Tabelle 2.5 ist für ausgewählte Lageunterschiede  $k \cdot \sigma$  die  $ARL$  zu finden.

Tabelle 2.5:  $ARL$  der  $\bar{X}$ -Karte und der EWMA-Karte

| $k$  | $\bar{X}$ -Karte | $\lambda = 0.4$ | $\lambda = 0.2$ | $\lambda = 0.1$ |
|------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|      |                  | $L = 2.959$     | $L = 2.859$     | $L = 2.702$     |
| 0.00 | 370.4            | 370.5           | 370.0           | 370.9           |
| 0.25 | 281.2            | 173.9           | 121.0           | 89.4            |
| 0.50 | 155.2            | 58.5            | 36.2            | 28.2            |
| 0.75 | 81.2             | 24.4            | 16.4            | 14.7            |
| 1.00 | 43.9             | 12.7            | 9.8             | 9.7             |
| 1.50 | 15.0             | 5.5             | 5.2             | 5.8             |
| 2.00 | 6.3              | 3.3             | 3.6             | 4.2             |
| 3.00 | 2.0              | 1.9             | 2.3             | 2.8             |
| 4.00 | 1.2              | 1.4             | 1.8             | 2.1             |

Wir sehen, dass die EWMA-Karte einen kleinen Lageunterschied viel schneller bemerkt als die  $\bar{X}$ -Karte. So beträgt die  $ARL$  für einen  $1\sigma$ -Shift bei der EWMA-Karte mit  $\lambda = 0.2$  und  $L = 2.859$  gleich 9.8. Wir haben  $\lambda = 0.2$  und  $L = 3$  verwendet. Hier ist die  $ARL$  gleich 10.84. Die  $ARL_0$  ist hier aber gleich 559.9. Wir sehen, dass bei gleichem  $\lambda$  und nicht sehr viel größerem  $L$  der  $1\sigma$ -Shift genau so schnell entdeckt wird, die  $ARL_0$  aber wesentlich größer ist.

Wir müssen nun noch eine Frage beantworten. Wie geht man vor, wenn  $\mu_0$  und  $\sigma$  unbekannt sind? Die Frage kann leicht beantwortet werden. Man schätzt  $\mu_0$  und  $\sigma$  wie bei der  $\bar{X}$ -Karte für  $n = 1$ .

## 2.5 Prozessfähigkeitsanalyse

Bisher haben wir Verfahren betrachtet, mit denen man überprüfen kann, ob ein Prozess unter statistischer Kontrolle ist. Ist ein Prozess unter Kontrolle, so sagt dies aber nichts darüber aus, ob er auch das leistet, was man von ihm erwartet. In der Regel hat man nämlich eine Vorstellung davon, in welchem Bereich die Werte des interessierenden Merkmals liegen sollten.

### Beispiel 8

Ein Arbeitnehmer wünscht, dass die Fahrzeit zum Arbeitsplatz zwischen 25 und 35 Minuten liegt.

Man spricht von **Prozessfähigkeit**, **Spezifikation** oder **Kapazität** und gibt ein Intervall  $[LSL, USL]$  an, in dem die Werte des Prozesses liegen sollen. Alle Werte, die nicht im Intervall  $[LSL, USL]$  liegen, sind nicht akzeptabel. In der Produktion von Gütern sind sie in der Regel Ausschuss.

Die untere Grenze dieses Intervalls heißt **untere Toleranzgrenze**  $LSL$  (lower specification limit) und die obere Grenze **obere Toleranzgrenze**  $USL$  (upper specification limit). Den Mittelpunkt des Intervalls  $[LSL, USL]$  nennt man den **Zielwert**  $T$  (target value).

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Es gilt  $LSL = 25$ ,  $USL = 35$  und  $T = 30$ .

Wir gehen im Folgenden von Normalverteilung aus.

Bei der Messung der Prozessfähigkeit müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Der Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses stimmt mit dem Zielwert  $T$  überein.
2. Der Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses stimmt mit dem Zielwert  $T$  nicht überein.

### 2.5.1 $\mu$ und $T$ stimmen überein

Es gilt also  $T = \mu$ . Somit ist  $\mu$  der Mittelpunkt des Intervalls  $[LSL, USL]$ . Um eine Maßzahl für die Prozessfähigkeit zu erhalten, betrachten wir zwei Intervalle.

Das Intervall  $[LSL, USL]$  wird durch den Anwender vorgegeben. Es enthält die Werte, die für ihn akzeptabel sind. Seine Länge ist

$$l_1 = USL - LSL \quad (2.90)$$

Die Länge des gewünschten Streubereichs ist also gleich  $USL - LSL$ .

Nun benötigen wir noch ein Intervall, das nahezu alle Realisationen des Merkmals enthält. Ist das Merkmal normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ , so erwarten wir, dass 99.73 Prozent aller Beobachtungen im Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  liegen. Seine Länge beträgt

$$l_2 = 6\sigma. \quad (2.91)$$

Die Länge des tatsächlichen Streubereichs ist also gleich  $6 \cdot \sigma$ .

Ist  $LSL = \mu - 3 \cdot \sigma$  und  $USL = \mu + 3 \cdot \sigma$ , so sind 0.27 Prozent aller Beobachtungen nicht akzeptabel. Der Prozess erbringt eine gute bis sehr gute Leistung. Ist  $LSL < \mu - 3 \cdot \sigma$  und  $USL > \mu + 3 \cdot \sigma$ , so ist der Ausschuss noch kleiner. Die Ausführungen legen folgende Definition nahe

**Definition 1**

Sei  $\mu$  der Erwartungswert,  $\sigma^2$  die Varianz eines Prozesses und  $T$  der Zielwert. Gilt  $T = \mu$ , dann heißt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma}. \quad (2.92)$$

*PCR*-Index.

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer kann sich für einen von zwei Prozessen entscheiden.

Zum einen kann er mit der Straßenbahn fahren. In diesem Fall ist die Fahrzeit normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 30$  und Varianz  $\sigma^2 = 1$ .

Er kann aber auch mit dem Auto fahren. In diesem Fall ist die Fahrzeit normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 30$  und Varianz  $\sigma^2 = 4$ .

Bei beiden Prozessen gilt  $\mu = T$ .

Beim ersten Prozess gilt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 1} = 1.67$$

Beim zweiten Prozess gilt

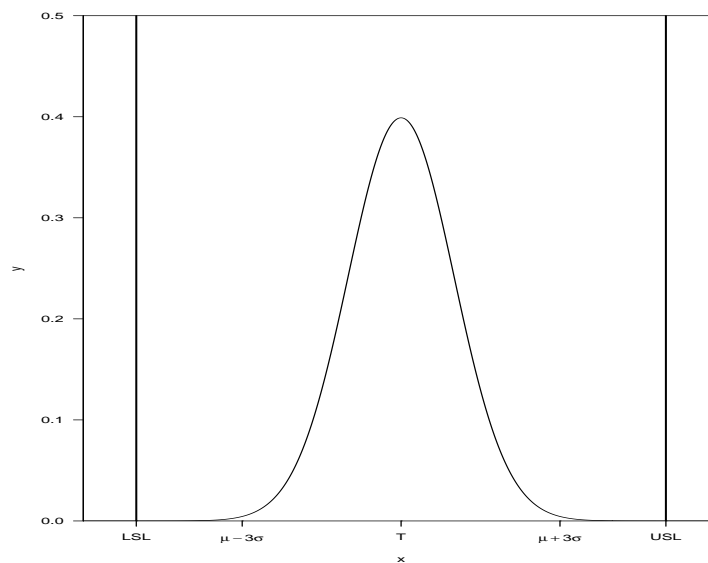
$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 2} = 0.83$$

Wir erwarten von einem Prozess, dass der gewünschte Streubereich größer als der tatsächliche Streubereich ist. Also sollte der *PCR* größer als 1 sein.

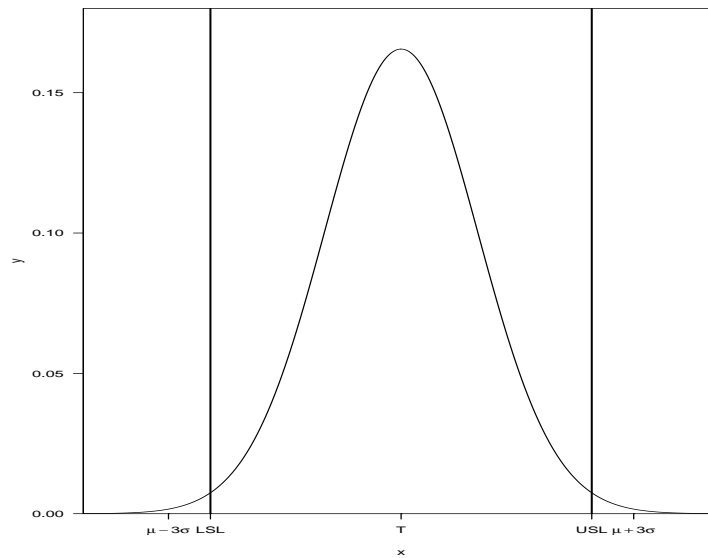
Montgomery fordert, dass der *PCR* eines existierenden Prozesses mindestens 1.33 und eines neuen Prozesses mindestens 1.50 betragen sollte.

Abbildung 2.28 zeigt einen Prozess, bei dem der *PCR* gleich 1.67 ist. Dieser ist hervorragend, da die Spezifikationen von fast allen Beobachtungen eingehalten werden.

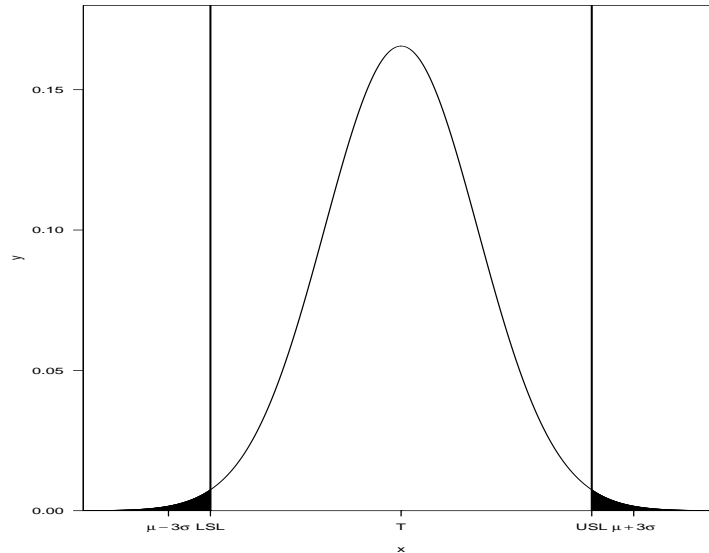
Abbildung 2.28: Prozess mit  $PCR = 1.67$



Ist der *PCR* kleiner als 1, so ist der Prozess sehr schlecht. Abbildung 2.29 zeigt einen Prozess, bei dem der *PCR* gleich 0.83 ist.

Abbildung 2.29: Prozess mit  $PCR = 0.83$ 

Um die Kapabilität zu beschreiben, kann man auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, einen Wert zu erhalten, bei dem die Spezifikation nicht eingehalten wird. In Abbildung 2.30 ist diese Wahrscheinlichkeit schwarz dargestellt.

Abbildung 2.30: Prozess mit  $PCR = 0.83$ 

Kann man Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  unterstellen, so gilt:

$$P(X < LSL) + P(X > ULS) = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right).$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle  $z$ .

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Beim ersten Prozess gilt

$$\begin{aligned} P(X < LSL) + P(X > ULS) &= \Phi\left(\frac{25 - 30}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35 - 30}{1}\right) \\ &= \Phi(-5) + 1 - \Phi(5) \\ &= 0.000000287 + 0.000000287 \\ &= 0.000000574 \end{aligned}$$



Beim zweiten Prozess gilt

$$\begin{aligned}
 P(X < LSL) + P(X > USL) &= \Phi\left(\frac{25-30}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35-30}{2}\right) \\
 &= \Phi(-2.5) + 1 - \Phi(2.5) \\
 &= 0.00621 + 0.00621 \\
 &= 0.01242
 \end{aligned}$$

Wir können die Wahrscheinlichkeit, einen Wert zu erhalten, bei dem die Spezifikation nicht eingehalten wird, auch in Abhängigkeit vom  $PCR$  angeben. Es gilt

$$\boxed{P(X < LSL) + P(X > USL) = 2\Phi(-3PCR)} \quad (2.93)$$

die Gültigkeit von Gleichung (2.93) sieht man folgendermaßen:

Aus  $USL - \mu = \mu - LSL$  folgt  $USL - \mu = -(LSL - \mu)$ . Da bei Normalverteilung gilt

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(-\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2.92) auf Seite 76 folgt

$$\sigma = \frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR} \quad (2.95)$$

Außerdem gilt

$$\mu = T = \frac{LSL + USL}{2} \quad (2.96)$$

Setzen wir die Gleichungen (2.95) und (2.96) in Gleichung (2.94) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 P(X < LSL) + P(X > USL) &= 2\Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{LSL - \frac{LSL + USL}{2}}{\frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR}}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{\frac{LSL - USL}{2}}{\frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR}}\right) \\
 &= 2\Phi(-3PCR)
 \end{aligned}$$

Sind  $T$  und  $\mu$  identisch, so können wir zu jedem Wert des  $PCR$  die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein Objekt die Spezifikation nicht einhält. Multiplizieren wir diese Wahrscheinlichkeit mit einer Million, so erhalten wir die erwartete Anzahl unter einer Million (ppm=parts per million), die die Spezifikation nicht einhält. Tabelle 2.6 gibt für ausgewählte Werte des  $PCR$  diesen Wert an

Tabelle 2.6:  $PCR$  mit ppm, die die Spezifikation nicht einhalten

| $PCR$ | ppm        |
|-------|------------|
| 0.50  | 133614.400 |
| 0.67  | 45500.260  |
| 0.75  | 24448.950  |
| 0.83  | 12419.330  |
| 1.00  | 2699.796   |
| 1.25  | 176.835    |
| 1.33  | 63.343     |
| 1.50  | 6.795      |
| 1.67  | 0.573      |
| 2.00  | 0.002      |

Ist der Parameter  $\sigma$  unbekannt, so schätzen wir ihn durch  $\hat{\sigma}$  und ersetzen  $\sigma$

in Gleichung (2.92) auf Seite 76 durch  $\hat{\sigma}$ . Wir erhalten dann

$$\widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{6 \hat{\sigma}} \quad (2.97)$$

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer fährt an an 20 aufeinander folgenden Tagen mit dem Auto zur Arbeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Wir schätzen  $\sigma$  mit Hilfe der Moving Ranges. Die Spannweiten von jeweils zwei benachbarten Beobachtungen sind:

3 6 1 0 2 4 1 4 6 3 0 1 1 2 4 2 2 1 2

Es gilt  $\bar{R} = 2.37$  und somit  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 2.37/1.128 = 2.1$ .

Somit gilt

$$\widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{6 \hat{\sigma}} = \frac{10}{6 \cdot 2.1} = 0.79$$

Ein Konfidenzintervall für den  $PCR$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist

$$\left[ \widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}}, \widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}{n-1}} \right]$$

Dabei ist  $\chi_{p; \nu}^2$  das  $p$ -Quantil der Chi-Quadratverteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden.  $n$  ist die Anzahl der Beobachtungen, die bei der Schätzung des Prozesses verwendet wurden.

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Sei  $1 - \alpha = 0.95$ . Es gilt  $n = 20$ . Tabelle B.2 auf Seite 181 entnehmen wir  $\chi_{0.025; 19}^2 = 8.907$  und  $\chi_{0.975; 19}^2 = 32.852$ . Also ist die Untergrenze des Konfidenzintervalls gleich

$$\widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}} = 0.79 \sqrt{\frac{8.907}{19}} = 0.54$$

und die Obergrenze gleich

$$\widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}{n-1}} = 0.79 \sqrt{\frac{32.852}{19}} = 1.04$$

Wir können die Hypothesen

$$H_0 : PCR = PCR_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : PCR \neq PCR_0$$

zum Niveau  $\alpha$  testen. Liegt  $PCR_0$  nicht im Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ , so lehnen wir  $H_0$  ab.

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Wir testen

$$H_0 : PCR = 1.33 \quad \text{gegen} \quad H_1 : PCR \neq 1.33$$

zum Niveau  $\alpha = 0.05$ . Da 1.33 nicht im Konfidenzintervall  $[0.54, 1.04]$  liegt, lehnen wir  $H_0$  ab.

## 2.5.2 $\mu$ und $T$ stimmen nicht überein

Wir haben bisher den Fall  $\mu = T$  betrachtet. Nun schauen wir uns an, was passiert, wenn  $\mu \neq T$  gilt.

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Der Erwartungswert der Fahrzeit bei der Fahrt mit der Straßenbahn beträgt nicht 30, sondern  $\mu = 34$ . Es gilt weiterhin  $\sigma = 1$ . Die Spezifikationen seien weiterhin  $LSL = 25$  und  $USL = 35$ .

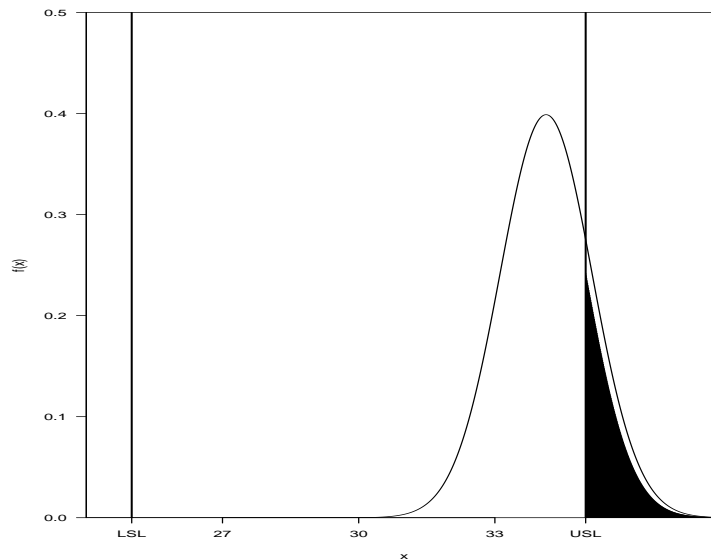
Somit gilt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 1} = 1.67 \quad (2.98)$$

Der Wert des  $PCR$  deutet auf eine hohe Prozessfähigkeit hin. Wir bestimmen noch die Wahrscheinlichkeit, dass die Spezifikation nicht eingehalten wird. Es gilt

$$\begin{aligned} P(X < LSL) + P(X > USL) &= \Phi\left(\frac{25 - 34}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35 - 34}{1}\right) \\ &= \Phi(-9) + 1 - \Phi(1) = 0.1587 \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr hoch. Abbildung 2.31 veranschaulicht den Sachverhalt.

Abbildung 2.31: Ein Beispiel, bei dem der  $PCR$  eine schlechte Maßzahl ist

Wie das Beispiel zeigt, liefert der  $PCR$  ein falsches Bild der Prozessfähigkeit, wenn der Zielwert  $T$  nicht mit dem Erwartungswert des Prozesses zusammenfällt. In diesem Fall sollte man die Abstände zwischen  $\mu$  und dem  $LSL$  und  $\mu$  und dem  $USL$  betrachten. Je größer diese sind, um so besser ist die Prozessfähigkeit. Wir betrachten die zwei Maßzahlen  $PCR_L$  und  $PCR_U$ , die folgendermaßen definiert sind

$$PCR_L = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (2.99)$$

und

$$PCR_U = \frac{USL - \mu}{3\sigma}. \quad (2.100)$$

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Es gilt

$$PCR_L = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{34 - 25}{3 \cdot 1} = 3$$

und

$$PCR_U = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{35 - 34}{3 \cdot 1} = 0.33.$$

Eine auf  $PCR_L$  und  $PCR_U$  beruhende Maßzahl für die Prozessfähigkeit ist

$$PCR_k = \min\{PCR_L, PCR_U\}. \quad (2.101)$$

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Es gilt

$$PCR_k = \min\{PCR_L, PCR_U\} = \min\{3, 0.33\} = 0.33.$$

Die Prozessfähigkeit ist also sehr schlecht.

Sind die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  des Prozesses unbekannt, so schätzen wir sie durch  $\bar{x}$  und  $\hat{\sigma}$ . Wir erhalten folgende Maßzahlen:

$$\widehat{PCR}_L = \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} \quad (2.102)$$

$$\widehat{PCR}_U = \frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}} \quad (2.103)$$

$$\widehat{PCR}_k = \min\{\widehat{PCR}_L, \widehat{PCR}_U\}. \quad (2.104)$$

### Beispiel 9

Ein Student will, dass die Fahrzeit zur Uni zwischen 26 und 34 Minuten liegt. Um zu überprüfen, ob ein Prozess dieses leistet, registriert er die Zeit von 20 aufeinanderfolgenden Tagen. Er erhält folgende Werte

33 31 31 32 32 33 30 33 32 34 33 32 32 32 32 31 32 32 31 32

Es gilt  $\bar{x} = 32$ .  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 1/1.128 = 0.89$ . Also gilt

$$\widehat{PCR}_L = \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{32 - 26}{3 \cdot 0.89} = 2.25,$$

$$\widehat{PCR}_U = \frac{USL - \bar{x}}{3 \hat{\sigma}} = \frac{34 - 32}{3 \cdot 0.89} = 0.75.$$

und

$$\widehat{PCR}_k = \min\{2.25, 0.75\} = 0.75.$$

Die Prozessfähigkeit ist schlecht.

Die Untergrenze eines Konfidenzintervall für den  $PCR_k$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist

$$\widehat{PCR}_k \left( 1 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n \widehat{PCR}_k^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right)$$

und die Obergrenze

$$\widehat{PCR}_k \left( 1 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n \widehat{PCR}_k^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right)$$

Dabei ist  $z_{1-\alpha/2}$  das  $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standardnormalverteilung.  $n$  ist die Anzahl der Beobachtungen, die bei der Schätzung des Prozesses verwendet wurden.

### Beispiel 9 (fortgesetzt)

Sei  $1 - \alpha = 0.95$ . Es gilt  $n = 20$ . Hieraus folgt  $z_{0.975} = 1.96$ . Also ist die Untergrenze des Konfidenzintervalls gleich

$$0.75 \left( 1 - 1.96 \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 0.75^2} + \frac{1}{2(20-1)}} \right) = 0.47$$

und die Obergrenze

$$0.75 \left( 1 + 1.96 \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 0.75^2} + \frac{1}{2(20-1)}} \right) = 1.03$$

# Kapitel 3

## Faktorielle Versuchspläne

### 3.1 Versuchsplanung

In der klassischen Qualitätskontrolle wird das Endprodukt vom Abnehmer kontrolliert. Hierdurch ist es möglich, dass ein Prozess lange Zeit unbemerkt nicht mehr unter Kontrolle ist und ein großer Teil der Produktion Ausschuss ist. Um dies zu verhindern hat Shewhart Qualitätsregelkarten entwickelt. Hierdurch bemerkt man während des Prozesses, ob noch alles unter Kontrolle ist. Die Kontrolle hat sich vom Ende des Prozesses in den laufenden Prozess verlagert. Nun wollen wir noch einen Schritt zurückgehen. Es soll der beste Prozess gewählt werden. Hierzu greift man auf Verfahren der Versuchsplanung zurück.

Das Ergebnis eines Prozesses hängt von einer Vielzahl von Einflussgrößen ab. Man nennt diese Einflussgrößen auch **Faktoren**. Wir bezeichnen Faktoren mit großen Buchstaben wie  $A$  oder  $B$ . Die Ausprägungsmöglichkeiten  $A_1, A_2, \dots, A_I$  eines Faktors  $A$  nennt man auch die **Faktorstufen**.

#### Beispiel 10

Bei der Fahrt zur Arbeit kann der Arbeitnehmer zwischen drei Strecken wählen. Er betrachtet also den Faktor  $A$  mit den Faktorstufen  $A_1, A_2$  und  $A_3$ . Dabei ist  $A_i$  die  $i$ -te Strecke.

Das Ergebnis eines Prozesses beurteilen wir am Wert einer Zufallsvariablen  $Y$ , die wir auch Zielvariable nennen.

#### Beispiel 10 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer ist an der Fahrzeit  $Y$  interessiert.

Wir betrachten zunächst nur einen Faktor. Es soll untersucht werden, ob sich der Erwartungswert der Zielvariablen  $Y$  auf den Faktorstufen unterscheidet.



Bezeichnet man den Erwartungswert von  $Y$  auf der  $i$ -ten Faktorstufe mit  $\mu_i$ , so soll getestet werden

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I$$

gegen

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

für mind. ein Paar  $(i, j)$  mit  $i \neq j$ .

Zur Überprüfung der Hypothesen führen wir den Versuch auf jeder Faktorstufe durch. Hierbei ist es sinnvoll, ihn auf jeder Faktorstufe zu wiederholen.

**Wiederholung** ist das *erste Prinzip der Versuchsplanung*.

Wir bezeichnen das Ergebnis der  $j$ -ten Wiederholung auf der  $i$ -ten Faktorstufe mit  $y_{ij}$ . Dabei kann  $i$  die Werte  $1, 2, \dots, I$  und  $j$  die Werte  $1, 2, \dots, n_i$  annehmen. Es werden also  $I$  Faktorstufen betrachtet. Außerdem kann die Anzahl der Beobachtungen auf den Faktorstufen unterschiedlich sein.

### Beispiel 10 (fortgesetzt)

Um zu entscheiden, bei welcher Strecke die mittlere Fahrzeit geringer ist, fährt er auf jeder Strecke genau fünfmal zur Arbeit. In Tabelle 3.1 sind die Beobachtungen zu finden. .

Tabelle 3.1: Fahrzeiten eines Arbeitnehmers auf drei Strecken

| Strecke | Fahrzeit |    |    |    |    |
|---------|----------|----|----|----|----|
| 1       | 38       | 44 | 40 | 41 | 37 |
| 2       | 44       | 43 | 47 | 50 | 41 |
| 3       | 44       | 40 | 41 | 42 | 38 |

Es gilt also speziell  $y_{23} = 47$  und  $y_{32} = 40$ .

Wir müssen aber noch ein weiteres Prinzip beachten. Wir wollen herausfinden, ob sich der Erwartungswert der Zielgröße auf den Faktorstufen unterscheidet. Um sicherzustellen, dass ein Unterschied in den Erwartungswerten  $\mu_i$  ausschließlich an den unterschiedlichen Faktorstufen liegt, müssen wir während des Versuchs alle anderen Einflussgrößen konstant halten. Würde der Arbeitnehmer nämlich alle Fahrten auf der ersten Strecke am Montag, alle Fahrten auf der zweiten Strecke am Dienstag und alle Fahrten auf der dritten Strecke am Mittwoch zurücklegen, so könnte er nicht entscheiden, ob

ein Unterschied in den Erwartungswerten durch die Strecken oder durch die Wochentagen bewirkt wird.

Eine Möglichkeit zur Vermeidung dieses Problems besteht darin, die Strecken zufällig auf die Tage zu verteilen. Hierdurch soll sichergestellt werden, dass sich alle Einflussgrößen gleichmäßig auf die Faktorstufen verteilen. Man spricht von **Randomisierung**. Das ist das *zweite Prinzip der Versuchsplanung*.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Effekt des Wochentages dadurch konstant zu halten, dass jede der drei Strecken an jedem Wochentag benutzt wird. Man spricht von **Blockbildung**. Dies ist das *dritte Prinzip der Versuchsplanung*.

Wir werden im Folgenden Versuche betrachten, bei denen die ersten beiden Prinzipien beachtet werden.

## 3.2 Einfaktorielle Varianzanalyse

### 3.2.1 Motivation

Um die Hypothese

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I \quad (3.1)$$

überprüfen zu können, müssen wir bestimmte Annahmen machen.

Wir gehen im Folgenden von den Realisationen  $y_1, \dots, y_N$  der unabhängigen, identisch mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  normalverteilten Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_N$  aus.

#### Beispiel 11

Die Studenten Dorin und Neuhaus ließen in einem kleinen Experiment 16 Studenten den PRESS-Test durchführen. Bei diesem müssen die Teilnehmer in 3 Minuten möglichst viele Aufgaben vom Typ  $3 - 5 + 1$  lösen. Hier ist die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben von 8 Teilnehmern:

42 51 48 87 39 53 43 73

Wie können wir die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_N$  modellmäßig beschreiben? Das einfachste Modell nimmt an, dass  $Y_i$  aus zwei additiven Komponenten besteht. Die erste Komponente  $\mu$  ist deterministisch, wobei  $\mu$  der Wert von  $Y_i$  ist, der allen Personen bzw. Objekten gemeinsam ist. Die Zufallsvariablen  $Y_i$  weicht von diesem Wert ab. Die stochastische Abweichung bezeichnen wir mit  $\epsilon_i$ . Wir erhalten also folgendes Modell

$$Y_i = \mu + \epsilon_i \quad (3.2)$$

Für die Zufallsvariablen  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  gilt  $E(\epsilon_i) = 0$  und  $Var(\epsilon_i) = \sigma^2$ . Hieraus folgt  $E(Y_i) = \mu$  und  $Var(Y_i) = \sigma^2$ .

Wir schätzen  $\mu$  mit der Methode der Kleinsten Quadrate. Bei dieser bestimmen wir den Wert von  $\mu$  so, dass die Summe der quadrierten Abweichungen der Beobachtungen  $y_1, \dots, y_N$  von  $\mu$  minimal wird. Wir suchen also den Wert von  $\mu$ , für den

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 \quad (3.3)$$

minimal wird.

Dieser ist

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Dies wird auf Seite 173 gezeigt.

### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 89)

Es gilt  $\bar{y} = 54.5$ .

Setzen wir  $\hat{\mu}$  für  $\mu$  in Gleichung (3.3) ein, so erhalten wir die Streuung, die durch das Modell in Gleichung (3.2) nicht erklärt wird:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (3.4)$$

### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 90)

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 &= (42 - 54.5)^2 + (51 - 54.5)^2 + (48 - 54.5)^2 + (87 - 54.5)^2 \\ &+ (39 - 54.5)^2 + (53 - 54.5)^2 + (43 - 54.5)^2 + (73 - 54.5)^2 \\ &= 1984 \end{aligned}$$

Dividiert man den Ausdruck in Gleichung (3.4) durch  $N - 1$ , so erhält man die Stichprobenvarianz  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 90)**

Es gilt

$$s^2 = \frac{1984}{7} = 283.4286$$

Im Beispiel ist die Streuung groß, da die Beobachtungen sich stark unterscheiden. Dies liegt sicherlich daran, dass sich die einzelnen Personen unterscheiden. Außerdem könnte es sein, dass die Rahmenbedingungen, unter denen der Test durchgeführt wurde, unterschiedlich waren. Wir wollen im Folgenden die Streuung durch Einflussgrößen erklären. Dabei gehen wir davon aus, dass diese Einflussgrößen qualitativ sind. Sie besitzen also nominales oder ordinales Messniveau. Derartige Einflussgrößen heißen **Faktoren**. Die Ausprägungsmöglichkeiten eines Faktors nennt man **Faktorstufen**. Wir betrachten im Folgenden immer Faktoren, die nur zwei Faktorstufen besitzen. Die Faktorstufen bezeichnen wir mit - und mit +.

Wir beginnen mit einem Faktor und bezeichnen diesen mit  $A$ . Die Berücksichtigung des Faktors führt dazu, dass wir die Indizierung der Zufallsvariablen und Beobachtungen ändern müssen. Wenn  $A$  auf der Stufe - steht, beobachten wir die Realisationen  $y_{11}, \dots, y_{1n}$  der unabhängigen identisch mit den Parametern  $\mu_1$  und  $\sigma^2$  normalverteilten Zufallsvariablen  $Y_{11}, \dots, Y_{1n}$ . Wenn  $A$  auf der Stufe + steht, beobachten wir die Realisationen  $y_{21}, \dots, y_{2n}$  der unabhängigen identisch mit den Parametern  $\mu_2$  und  $\sigma^2$  normalverteilten Zufallsvariablen  $Y_{21}, \dots, Y_{2n}$ . Allgemein betrachten wir  $Y_{ij}$  mit  $i = 1, 2$  und  $j = 1, \dots, n$ . Der erste Index bezieht sich auf die Faktorstufe, der zweite auf die  $j$ -te Beobachtung. Wir gehen davon aus, dass auf jeder Faktorstufe die gleiche Anzahl von Beobachtungen gemacht wurde.

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 91)**

Beim ersten, dritten, fünften und siebten Teilnehmer wurde die Schriftgröße 8 pt, bei den restlichen die Schriftgröße 16 pt verwendet. Der Faktor  $A$  ist also die Schriftgröße. Die Faktorstufe - ist 8 pt, die Faktorstufe + ist 16 pt.

- 42 48 39 43

+ 51 87 53 73

**3.2.2 Das Modell**

In Analogie zum Modell in Gleichung (3.2) können wir folgendes Modell formulieren:

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad (3.5)$$

Dabei ist  $\mu_i$  der Wert, der den Personen auf der  $i$ -ten Faktorstufe gemeinsam ist. Die  $\epsilon_{ij}$  sind die individuellen Abweichungen. Wir unterstellen  $E(\epsilon_{ij}) = 0$  und  $Var(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$ . Hieraus folgt  $E(Y_{ij}) = \mu_i$  und  $Var(Y_{ij}) = \sigma^2$ .

Der Effekt  $E_A$  des Faktors  $A$  gibt an, wie sich  $Y$  im Mittel ändert, wenn man von der Faktorstufe - auf die Faktorstufe + übergeht. Es gilt also

$$E_A = \mu_2 - \mu_1.$$

### 3.2.3 Schätzung der Parameter und Effekte

Wir schätzen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nach der Methode der Kleinsten Quadrate. Wir suchen also die Werte von  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , für die

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \mu_2)^2 \quad (3.6)$$

minimal wird. Es gilt

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}. \quad (3.7)$$

Dies wird auf Seite 174 gezeigt.

#### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 91)

Es gilt  $\bar{y}_1 = 43$  und  $\bar{y}_2 = 66$ . Die Teilnehmer lösen also im Mittel 43 Aufgaben richtig, wenn die 8 pt Schrift verwendet wurde. Sie lösen im Mittel 66 Aufgaben richtig, wenn die 16 pt Schrift verwendet wurde.

Wir schätzen den Effekt eines Faktors durch die Differenz der jeweiligen Mittelwerte. Der geschätzte Effekt  $e_A$  des Faktors  $A$  ist gleich  $e_A = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$ .

#### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 92)

Der geschätzte Effekt von  $A$  ist gleich  $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = 66 - 43 = 23$ . Die Anzahl richtig gelöster Aufgaben ist also bei einer Schriftgröße von 16 pt im Mittel um 23 höher als bei einer Schriftgröße von 8 pt.

### 3.2.4 Tests

Neben der Schätzung des Effekts wollen wir wissen, ob der Effekt signifikant von 0 verschieden ist. Wir testen also

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq 0.$$

Dieses Testproblem ist äquivalent zu

$$H_0 : \mu_2 = \mu_1 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_2 \neq \mu_1 .$$

Unter den obigen Annahmen könnten wir diese Hypothesen mit dem  $t$ -Test überprüfen. Wir betrachten aber eine andere Teststatistik, die wir auch auf Situationen übertragen können, in denen wir mehr als einem Faktor verwenden. Um diese Teststatistik zu finden, müssen wir etwas weiter ausholen.

Wir hatten zuerst das Modell in Gleichung (3.2) betrachtet und sind dann zum Modell in Gleichung (3.5) übergegangen. Um diese beiden Modelle vergleichen zu können, verwenden wir im Modell in Gleichung (3.2) für  $Y$  und  $\epsilon$  die Notation des Modells in Gleichung (3.5). Wir schreiben das Modell in Gleichung (3.2) also als:

$$Y_{ij} = \mu + \epsilon_{ij} \tag{3.8}$$

Der Schätzer von  $\mu$  im Modell in Gleichung (3.8) ist

$$\bar{y} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n y_{ij} \tag{3.9}$$

Die nicht durch das Modell in Gleichung (3.8) erklärte Streuung ist

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 \tag{3.10}$$

Außerdem hatten wir folgendes Modell betrachtet:

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \tag{3.11}$$

Die unerklärte Streuung in diesem Modell erhalten wir, indem wir  $\bar{y}_1$  und  $\bar{y}_2$  für  $\mu_1$  und  $\mu_2$  in Gleichung (3.6) einsetzen:

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{y}_2)^2$$

Wir bezeichnen diese mit  $SS_R$ :

$$SS_R = \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{y}_2)^2 \tag{3.12}$$

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 92)**

Es gilt

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{y}_1)^2 = (42 - 43)^2 + (51 - 43)^2 + (48 - 43)^2 + (87 - 43)^2 = 42$$

und

$$\sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{y}_2)^2 = (39 - 66)^2 + (53 - 66)^2 + (43 - 66)^2 + (73 - 66)^2 = 884.$$

also gilt  $SS_R = 42 + 884 = 926$ .

Das in Gleichung (3.8) betrachtete Modell ist ein Spezialfall des Modells in Gleichung (3.11). Gilt nämlich  $\mu_1 = \mu_2$  im Modell in Gleichung (3.5), so sind die beiden Modelle identisch. Um zu überprüfen, ob es sinnvoll ist vom Modell in Gleichung (3.8) zum Modell in Gleichung (3.11) überzugehen, vergleichen wir die unerklärte Streuung im Modell in Gleichung (3.8) mit der unerklärten Streuung im Modell in Gleichung (3.11). Es gilt

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^2 n(\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (3.13)$$

Der Beweis der Gültigkeit dieser Beziehung ist auf Seite 175 zu finden.

Wir nennen diesen Ausdruck auch die durch den Faktor  $A$  erklärte Streuung  $SS_A$ . Es gilt:

$$SS_A = \sum_{i=1}^2 n(\bar{y}_i - \bar{y})^2 = n(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + n(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 \quad (3.14)$$

Sie ist gleich der Streuung der Mittelwerte von  $Y$  auf den beiden Faktorstufen.

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 94)**

Es gilt  $\bar{y}_1 = 43$ ,  $\bar{y}_2 = 66$ ,  $\bar{y} = 54.5$  und  $n = 4$ . Also gilt

$$SS_A = 4(43 - 54.5)^2 + 4(66 - 54.5)^2 = 1058.$$

Wir können  $SS_A$  noch umformen. Es gilt

$$SS_A = \frac{n(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}{2} \quad (3.15)$$

Der Beweis dieser Beziehung ist auf Seite 176 zu finden.

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 94)**

Es gilt  $\bar{y}_1 = 43$ ,  $\bar{y}_2 = 66$ ,  $\bar{y} = 54.5$  und  $n = 4$ . Also gilt

$$SS_A = \frac{4(66 - 43)^2}{2} = 1058.$$

Wir sehen, dass  $SS_A$  um so größer ist, je mehr die beiden Mittelwerte sich unterscheiden. Wann ist aber  $SS_A$  groß genug, um uns für  $H_1$  zu entscheiden? Schauen wir uns ein Beispiel an.

**Beispiel 12**

Wir betrachten zwei Fälle.

*1. Fall*

$$\begin{array}{r} - \quad 48 \ 54 \ 50 \ 51 \ 47 \\ + \quad 55 \ 54 \ 58 \ 61 \ 52 \end{array}$$

*2. Fall*

$$\begin{array}{r} - \quad 51 \ 43 \ 54 \ 46 \ 56 \\ + \quad 48 \ 57 \ 65 \ 59 \ 51 \end{array}$$

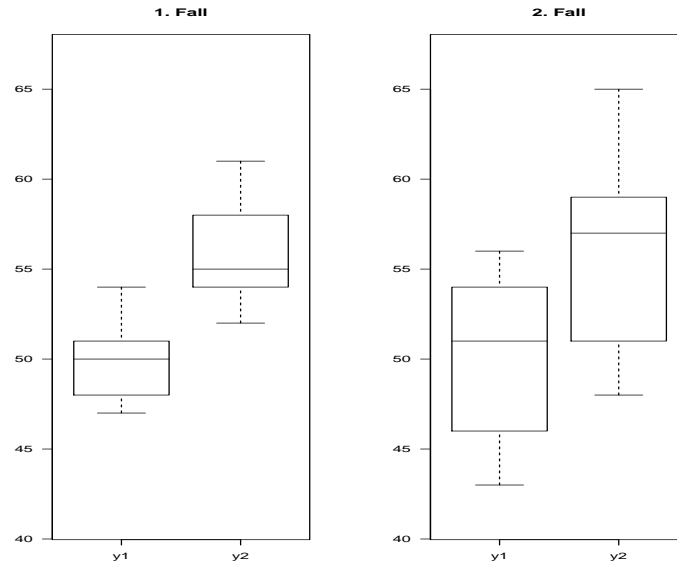
In beiden Fällen gilt  $\bar{y}_1 = 50$ ,  $\bar{y}_2 = 56$  und  $\bar{y} = 53$ . Also gilt

$$SS_A = 5 \cdot (50 - 53)^2 + 5 \cdot (56 - 53)^2 = 90.$$

Die unerklärte Streuung unterscheidet sich aber. Im ersten Fall gilt  $SS_R = 80$  und im zweiten Fall gilt  $SS_R = 298$ . Die durch das Modell nicht erklärte Streuung ist im zweiten Fall viel größer. Dies verdeutlichen die beiden Boxplots.



Abbildung 3.1: Boxplots im 1. Fall und im 2. Fall



Wir sehen, dass im Beispiel im zweiten Fall die Streuung innerhalb der Stichproben viel größer ist als im ersten Fall. Dies führt dazu, dass die Boxplots sich so stark überlappen, dass die beiden Stichproben aus einer Grundgesamtheit kommen können. Eine Teststatistik sollte also neben  $SS_A$  auch  $SS_R$  berücksichtigen. In der Teststatistik vergleichen wir nun die mittleren Streuungen.  $SS_A$  besteht aus zwei Summanden. Ist der Wert von  $\bar{y}$  bekannt, so können wir nur einen der beiden Summanden frei wählen. Also hat  $SS_A$  1 Freiheitsgrad.  $SS_R$  besteht aus  $2n$  Summanden. Ist der Wert von  $\bar{y}_i$  bekannt, so können wir von den  $n$  Summanden, in denen  $\bar{y}_i$  auftaucht,  $n - 1$  frei wählen. Der letzte ergibt sich aus dem Wert von  $\bar{y}_i$ . Also hat  $SS_R$   $2n - 2$  Freiheitsgrade.

Die Teststatistik ist:

$$F = \frac{SS_A}{SS_R/(2n - 2)}.$$

#### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 95)

Es gilt  $SS_A = 1058$  und  $SS_R = 926$ . Weiterhin gilt  $2n - 2 = 8 - 2 = 6$ . Also gilt

$$F = \frac{SS_A}{SS_R/(2n - 2)} = \frac{1058}{926/6} = 6.86$$

Trifft  $H_0$  zu, so ist  $F$  mit den Freiheitsgraden 1 und  $2n - 2$  F-verteilt. Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt

$$F \geq F_{1,2n-2;1-\alpha}.$$

Dabei ist  $F_{1,2n-2;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $2n - 2$  Freiheitsgraden.

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 96)**

Es gilt  $F_{1,6;0.95} = 5.99$ . Also lehnen wir  $H_0$  zum Signifikanzniveau 0.05 ab.

### 3.2.5 Die ANOVA-Tabelle

Wir stellen die Ergebnisse einer Varianzanalyse in einer sogenannten ANOVA-Tabelle zusammen. Diese hat folgenden Aufbau

Tabelle 3.2: Allgemeiner Aufbau einer ANOVA-Tabelle

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$           |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|---------------|
| Faktor $A$           | $SS_A$        | 1              | $MSS_A$                | $MSS_A/MSS_R$ |
| Rest                 | $SS_R$        | $2n - 2$       | $MSS_R$                |               |
| Gesamt               | $SS_T$        | $2n - 1$       |                        |               |

Dabei ist  $SS_T = SS_A + SS_R$ . Es gilt

$$SS_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 97)**

Die ANOVA-Tabelle ist in Tabelle 3.3 zu finden.

Tabelle 3.3: ANOVA-Tabelle

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$  |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|------|
| Faktor $A$           | 1058          | 1              | 1058.00                | 6.86 |
| Rest                 | 926           | 6              | 154.33                 |      |
| Gesamt               | 1984          | 7              |                        |      |

### 3.2.6 Der Algorithmus von Yates

Von Yates wurde ein Algorithmus vorgeschlagen, mit dem man bei einem faktoriellen Versuchsplan die Schätzer der Effekte und die Quadratsummen schnell bestimmen kann. Schauen wir uns hierzu zunächst noch einmal den Schätzer des Effekts von  $A$  und  $SS_A$  an.

Der Schätzer des Effekts von  $A$  ist

$$e_A = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j}}{n}. \quad (3.16)$$

Für  $SS_A$  gilt

$$SS_A = \frac{\left( \sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j} \right)^2}{2n} \quad (3.17)$$

Der Beweis ist auf Seite 176 zu finden.

Wir sehen, dass beide Ausdrücke von  $\sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j}$  abhängen. Man nennt dies auch den **Kontrast**  $K_A$  des Faktors  $A$ :

$$K_A = \sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j}$$

Dieser ist gleich der Differenz aus der Summe der Beobachtungen auf + und der Summe der Beobachtungen auf -.

Wir schreiben im Folgenden für die Summe der Beobachtungen auf + das Symbol  $a$  und für die Summe der Beobachtungen auf - das Symbol  $(1)$ . Dabei symbolisiert das  $a$ , dass der Faktor  $A$  auf + steht.

Mit Hilfe von  $(1)$  und  $a$  können wir nun den Kontrast von  $A$  bestimmen. Er ist  $K_A = a - (1)$ .

Es gilt

$$e_A = \frac{K_A}{n}$$

und

$$SS_A = \frac{K_A^2}{2n}$$

Mit dem Algorithmus von Yates kann man auch für Versuchspläne mit mehr als einem Faktor die Kontraste der Faktoren bestimmen. Wir wählen deshalb eine Form der Darstellung, die auf mehr als einen Faktor verallgemeinert werden kann. Hierzu stellen wir folgende Tabelle auf:

Tabelle 3.4: Die Ausgangstabelle beim Algorithmus von Yates bei einem  $2^1$ -Versuchsplan

$$\overline{\begin{array}{c|c} (1) & \\ \hline a & \end{array}}$$

Nun erzeugen wir eine weitere Spalte. Die erste Zahl in dieser Spalte ist gleich der Summe der Zahlen in der ersten Spalte. Die zweite Zahl ist die Differenz aus der zweiten Zahl und der ersten Zahl. Wir erhalten folgende Tabelle.

weiter

Tabelle 3.5: Der erste Schritt beim Algorithmus von Yates bei einem  $2^1$ -Versuchsplan

$$\overline{\begin{array}{c|c|c} (1) & (1) + a & \\ \hline a & a - (1) & \end{array}}$$

Bei einem  $2^1$ -Versuchsplan sind wir nach diesem Schritt fertig. Wir sehen, dass neben  $A$  der Kontrast von  $A$  steht.

**Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 97)**

Es gilt  $(1) = 172$  und  $a = 264$ . Wir erhalten folgende Tabelle

Tabelle 3.6: Der erste Schritt beim Algorithmus von Yates bei einem  $2^1$ -Versuchsplan

$$\overline{\begin{array}{c|c|c} (1) & 172 & 436 \\ \hline a & 264 & 92 \end{array}}$$

Es gilt also  $K_A = 92$ .

Also gilt

$$e_A = 92/4 = 23$$

und

$$SS_A = (92^2)/(2 \cdot 4) = 1058$$

### 3.2.7 Einfaktorielle Varianzanalyse in R

Wir wollen nun lernen, wie man in R eine einfaktorielle Varianzanalyse durchführt. R bietet eine **interaktive Umgebung**, **Befehlsmodus** genannt, in der man die Daten direkt eingeben und analysieren kann. Durch das **Bereitschaftszeichen** `>` wird angezeigt, dass eine Eingabe erwartet wird. Der Befehlsmodus ist ein mächtiger Taschenrechner. Wir können hier die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit den Operatoren `+`, `-`, `*` und `/` durchführen:

```
> 3+4
[1] 7
> 3-4
[1] -1
> 3*4
[1] 12
> 3/4
[1] 0.75
```

Zum Potenzieren benutzen wir `^` :

```
> 3^4
[1] 81
```

Man kann aber auch komplizierte Analysen durchführen. Wir schauen uns die Daten aus Beispiel 11 auf Seite 89 analysieren. Die Urliste sieht folgendermaßen aus.

```
42 51 48 87 39 53 43 73
```

Um die Daten in R analysieren zu können, müssen wir sie eingeben. Hierzu gibt es in R eine Reihe von Möglichkeiten. Schauen wir uns die einfachste an. Wir erzeugen einen **Vektor** mit den Daten. Ein Vektor ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einer endlichen Folge. Ein Vektor besteht aus sogenannten **Komponenten**. Einen Vektor erstellt man in R mit der Funktion `c`. Diese macht aus einer Folge von Zahlen, die durch Kommata getrennt sind, einen Vektor, dessen Komponenten die einzelnen Zahlen sind. Die Zahlen sind die Argumente der Funktion `c`. Argumente einer Funktion stehen in runden Klammern hinter dem Funktionsnamen und sind durch Kommata voneinander getrennt. Wir geben also ein:

```
> c(42,51,48,87,39,53,43,73)
```

Am Bildschirm erhalten wir folgendes Ergebnis:

```
[1] 42 51 48 87 39 53 43 73
```

Die Elemente des Vektors werden ausgegeben. Am Anfang steht [1]. Dies zeigt, dass die erste Zahl gleich der ersten Komponente des Vektors ist. Um mit den Werten weiterhin arbeiten zu können, müssen wir sie in einer **Variablen** speichern. Dies geschieht mit dem Zuweisungsoperator `<-`, den man durch die Zeichen `<` und `-` erhält. Auf der linken Seite steht der Name der Variablen, der die Werte zugewiesen werden sollen, auf der rechten Seite steht der Aufruf der Funktion `c`.

Die Namen von Variablen dürfen beliebig lang sein, dürfen aber nur aus Buchstaben, Ziffern und dem Punkt bestehen, wobei das erste Zeichen ein Buchstabe oder der Punkt sein muss. Beginnt ein Name mit einem Punkt, so dürfen nicht alle folgenden Zeichen Ziffern sein. Hierdurch erzeugt man nämlich eine Zahl.

Wir nennen die Variable `Anzahl`. R unterscheidet Groß- und Kleinschreibung. Die Variablennamen `x` und `X` beziehen sich also auf unterschiedliche Objekte. Wir geben ein

```
> Anzahl<-c(42,51,48,87,39,53,43,73)
```

Den Inhalt einer Variablen kann man sich durch Eingabe des Namens anschauen. Der Aufruf

```
> Anzahl
```

liefert das Ergebnis

```
[1] 42 51 48 87 39 53 43 73
```

Die Daten analysieren wir in R mit Funktionen. In R gibt es zur Bestimmung des Mittelwerts die Funktion `mean`. Für die Variable `Anzahl` erhalten wir

```
> mean(Anzahl)
```

```
[1] 54.5
```

Den Median bestimmen wir mit der Funktion `median`:durch

```
> median(Anzahl)
```

```
[1] 49.5
```

Die Stichprobenvarianz liefert die Funktion `var`

```
> var(Anzahl)
```

```
[1] 283.4286
```

und die Standardabweichung die Funktion `sd`

```
> sd(Anzahl)
[1] 16.83534
```

Das untere Quartil  $x_{0.25}$  und das obere Quartil  $x_{(0.75)}$  liefert die Funktion `fiveum`. Ruft man diese mit der Variablen `x` auf, so erhält man neben den beiden Quartilen noch den Median, das Maximum und das Minimum.

```
> five<-fiveum(Anzahl)
> five
[1] 39.0 42.5 49.5 63.0 87.0
```

Das untere Quartil steht in der zweiten Komponente und das obere Quartil in der vierten Komponente des Vektors `five`. Auf Komponenten eines Vektors greift man durch Indizierung zu. Hierzu gibt man den Namen des Vektors gefolgt von eckigen Klammern ein, zwischen denen die Nummer der Komponente steht, auf die man zugreifen will. Den Wert des unteren Quartils liefert folgender Aufruf:

```
> five[2]
[1] 42.5
```

und den Wert des oberen Quartils folgender Aufruf:

```
> five[4]
[1] 63
```

Auf mehrere Komponenten eines Vektors greift man zu, indem man einen Vektor mit den Nummern der Komponenten bildet und mit diesem indiziert. So erhält man den Wert des unteren Quartils und den Wert des oberen Quartils durch

```
> five[c(2,4)]
[1] 42.5 63.0
```

Wir haben nun gesehen, wie man univariate Datensätze in R analysiert. Nun wollen wir uns noch anschauen, wie man partielle Informationen aus einem Datensatz herausfiltern kann. Wir haben bereits gelernt, wie man durch Indizieren eine oder mehrere Komponenten eines Vektors auswählen kann. Will man auf die letzte Komponente zugreifen, so benötigt man die Länge des Vektors. Diese liefert die Funktion `length`:



```
> length(Anzahl)
[1] 8
```

Die letzte Komponente des Vektors `Anzahl` erhalten wir also durch

```
> Anzahl[length(Anzahl)]
[1] 73
```

Wir können auf Komponenten, die hintereinander stehen, einfacher zugreifen. Sind  $i$  und  $j$  natürliche Zahlen mit  $i < j$ , so liefert in R der Ausdruck `i:j` die Zahlenfolge  $i, i+1, \dots, j-1, j$ . Ist  $i > j$ , so erhalten wir die Zahlenfolge  $i, i-1, \dots, j+1, j$ . Wollen wir also auf die ersten drei Komponenten von `Anzahl` zugreifen, so geben wir ein

```
> Anzahl[1:3]
[1] 42 51 48
```

Wollen wir den Vektor `Anzahl` in umgekehrter Reihenfolge ausgeben, so geben wir ein

```
> Anzahl[length(Anzahl):1]
[1] 73 43 53 39 87 48 51 42
```

Mit der Funktion `rev` hätten wir das gleiche Ergebnis erhalten.

```
> rev(Anzahl)
[1] 73 43 53 39 87 48 51 42
```

Oft will man Komponenten eines Vektors selektieren, die bestimmte Eigenschaften besitzen. Hierzu benötigt man Vergleichsoperatoren, mit denen man auf Gleichheit mit `==`, Ungleichheit mit `!=`, kleiner mit `<`, kleiner gleich mit `<=`, größer mit `>` oder größer gleich mit `>=` überprüfen kann. Das Ergebnis des Vergleichs ist vom Typ `logical`, ist also entweder `TRUE` oder `FALSE`:

```
> 3<4
[1] TRUE
```

Man kann natürlich auch einen Vektor der Länge  $n$  und einen Skalar mit einem Vergleichsoperator verknüpfen:

```
> 1:5 <= 3
[1] TRUE TRUE TRUE FALSE FALSE
```

Indiziert man einen Vektor der Länge  $n$  mit einem Vektor vom Typ `logical` der Länge  $n$ , so werden die Komponenten ausgewählt, bei denen im Vektor vom Typ `logical` ein `TRUE` steht. Wollen wir die Anzahl der Teilnehmer wissen, die weniger als 50 Aufgaben richtig gelöst haben, so geben wir ein

```
> Anzahl[Anzahl<50]
[1] 42 48 39 43
```

Die Nummern der Teilnehmer erhalten wir durch

```
> (1:length(Anzahl))[Anzahl<50]
[1] 1 3 5 7
```

Die Funktion `sum` bestimmt die Summe der Komponenten eines Vektors. Wollen wir also die Gesamtzahl der richtig gelösten Aufgaben wissen, so geben wir ein:

```
> sum(Anzahl)
[1] 436
```

Wir können den Mittelwert der Werte der Variablen `Anzahl` also folgendermaßen bestimmen:

```
> sum(Anzahl)/length(Anzahl)
[1] 54.5
```

Sind alle Komponenten eines Vektors vom Typ `logical`, so wird `F` in `0` und `T` in `1` umgewandelt, wenn man eine Funktion auf den Vektor anwendet, die numerische Argumente erwartet. Der Aufruf

```
> sum(Anzahl<50)
[1] 4
```

liefert also die Anzahl der Teilnehmer, die weniger als 50 Aufgaben richtig gelöst haben. Sollen mehrere Bedingungen erfüllt sein, so kann man die logischen Operatoren `&` und `|` verwenden. Der Operator `&` entspricht dem logischen "und" und der Operator `|` entspricht dem logischen "oder". Die Indizes der Teilnehmer, die mindestens 40 und höchstens 60 Aufgaben richtig gelöst haben, erhalten wir durch

```
> (1:length(Anzahl))[Anzahl>=40 & Anzahl<=60]
[1] 1 2 3 6 7
```

Wir wollen die nicht durch das Modell erklärte Streuung

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

bestimmen.

Der folgende Befehl subtrahiert von jeder Komponente des Vektors `Anzahl` den Mittelwert der Komponenten des Vektors `Anzahl`.

```
> Anzahl-mean(Anzahl)
[1] -12.5 -3.5 -6.5 32.5 -15.5 -1.5 -11.5 18.5
```

Wir quadrieren jede dieser Differenzen durch

```
> (Anzahl-mean(Anzahl))^2
[1] 156.25 12.25 42.25 1056.25 240.25 2.25 132.25 342.25
```

Jetzt müssen wir nur noch summieren.

```
> sum((Anzahl-mean(Anzahl))^2)
[1] 1984
```

Schauen wir uns die einfaktorielle Varianzanalyse an. Die Daten stehen immer noch im Vektor `Anzahl`. Die erste, dritte, fünfte und siebte Komponenten von `Anzahl` gehören zur Faktorstufe - des Faktors `A`, die restlichen zur Faktorstufe +. Wir erzeugen einen Vektor `A` der Länge 8, in dem abwechseln -1 und 1 stehen. Hierzu benutzen wir die Funktion `rep`. Der Aufruf

```
rep(x,times)
```

erzeugt einen Vektor, in dem das Argument `x` `times`-mal wiederholt wird:

```
> rep(1,4)
[1] 1 1 1 1
```

Dabei können `x` und `times` Vektoren sein. Sind `x` und `times` gleich lange Vektoren, so wird `x[i]` `times[i]`-mal wiederholt.

```
> A<-rep(c(-1,1),4)
> A
[1] -1 1 -1 1 -1 1 -1 1
```

Nun müssen wir aus `A` nur noch einen Faktor machen. Dies leistet die Funktion `factor`.

```
> A<-factor(A)
> A
[1] -1 1 -1 1 -1 1 -1 1
Levels: -1 1
```

Um eine Varianzanalyse durchführen zu können, verwenden wir die Funktion `anova`. Die Funktion `anova` hat das Argument `formula`. Mit diesem können wir das Modell durch eine Formel spezifizieren. Wie sieht diese Formel für eine einfaktorielle Varianzanalyse für das Beispiel aus? Wir wollen die Variable `Anzahl` durch den Faktor `A` erklären. Hierfür schreiben wir die Formel `Anzahl ~ A`. Auf der linken Seite der Formel steht die zu erklärende Variable. Das Zeichen `~` liest man als 'wird modelliert durch'. Auf der rechten Seite steht die erklärende Variable. Wollen wir also die besprochene Varianzanalyse durchführen, so geben wir ein:

```
> e<-aov(Anzahl~A)
```

Die Variable `e` enthält das Ergebnis der Varianzanalyse. Rufen wir die Funktion `summary` mit `e` als Argument auf, so erhalten wir die ANOVA-Tabelle.

```
> summary(e)
              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
A              1 1058.00 1058.00  6.8553 0.03968 *
Residuals     6  926.00  154.33
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

## 3.3 Zweifaktorielle Varianzanalyse

### 3.3.1 Das additive Modell

#### 3.3.1.1 Das Modell

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Zielgröße nur von einem Faktor abhängt. Wir wollen nun einen weiteren Faktor betrachten. Wir gehen also davon aus, dass wir Faktoren  $A$  und  $B$  betrachten, die jeweils zwei Faktorstufen besitzen. Im Folgenden sind  $A$  und  $B$  Faktoren mit den Faktorstufen  $A_1$  und  $A_2$  beziehungsweise  $B_1$  und  $B_2$ . Wir bezeichnen  $A_1$  und  $B_1$  mit  $-$  und  $A_2$  und  $B_2$  mit  $+$ . Wir werden im Folgenden *faktorielle Versuchspläne* betrachten. Bei diesen wird jede Kombination der Faktoren betrachtet. Hat der Faktor  $A$  also die Faktorstufen  $-$  und  $+$  und der Faktor  $B$  die Faktorstufen  $-$  und  $+$ , so gibt es die Faktorstufenkombinationen  $(-, -)$ ,  $(+, -)$ ,  $(-, +)$  und  $(+, +)$ . Dabei steht das erste Symbol für den Faktor  $A$  und das zweite für den Faktor  $B$ . Auf jeder Faktorstufenkombination werden  $n$  Versuche durchgeführt. Dabei bezeichnen wir die Realisation, die die Zielgröße  $Y$  auf der  $i$ -ten Faktorstufe von  $A$  und der  $j$ -ten Faktorstufe von  $B$  bei der  $k$ -ten Wiederholung annimmt, mit  $y_{ijk}$ . Der Index  $i$  nimmt also den Wert 1 an, wenn  $A$  auf  $-$  steht. Steht  $A$  auf  $+$ , so gilt  $i = 2$ . Entsprechend bedeutet  $j = 1$ , dass  $B$  auf  $-$  steht, und  $j = 2$ , dass  $B$  auf  $+$  steht. Wir stellen die Daten in einer Tabelle dar, deren allgemeine Form in Tabelle 3.7 zu finden ist.

Tabelle 3.7: Tabelle für einen zweifaktoriellen Versuch

| $A$ | $B$ | Merkmal   |           |          |           |
|-----|-----|-----------|-----------|----------|-----------|
| $-$ | $-$ | $y_{111}$ | $y_{112}$ | $\cdots$ | $y_{11n}$ |
| $+$ | $-$ | $y_{211}$ | $y_{212}$ | $\cdots$ | $y_{21n}$ |
| $-$ | $+$ | $y_{121}$ | $y_{122}$ | $\cdots$ | $y_{12n}$ |
| $+$ | $+$ | $y_{221}$ | $y_{222}$ | $\cdots$ | $y_{22n}$ |

#### Beispiel 11 (fortgesetzt von Seite 100)

Dorin und Neumann haben neben der Schriftgröße noch den Faktor **Musik** betrachtet. Diesen bezeichnen wir mit  $B$ . Dieser steht auf  $-$ , wenn während des Tests keine Musik lief. Ansonsten steht er auf  $+$ . Von den 8 Beobachtungen steht  $B$  bei der ersten, zweiten, fünften und sechsten auf  $-$ . Ansonsten steht  $B$  auf  $+$ . Wir können die Daten folgendermaßen in einer Tabelle den Faktorstufen zuordnen:

| A | B | Werte |    |
|---|---|-------|----|
| - | - | 42    | 39 |
| + | - | 51    | 53 |
| - | + | 48    | 43 |
| + | + | 87    | 73 |

Um ein geeignetes Modell zu finden, schauen wir uns noch einmal das Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse an. Es gilt

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$$

Um dieses Modell auf mehr als einen Faktor zu erweitern, müssen wir es modifizieren. Wir schreiben

$$\mu_i = \mu_i + \mu - \mu = \mu + \mu_i - \mu = \mu + \alpha_i.$$

Dabei ist  $\alpha_i$  der Effekt der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$ . Wir erhalten also folgendes Modell

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad (3.18)$$

Schätzt man die Parameter  $\mu$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus Gleichung (3.18), so erhalten wir zwei Bestimmungsgleichungen für drei Parameter. Dies wird in Kapitel auf Seite 177 gezeigt. Um eindeutige Parameterschätzer zu erhalten, führen wir eine Nebenbedingung ein. Wir unterstellen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (3.19)$$

Wir bestimmen Schätzer  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}_1$  und  $\hat{\alpha}_2$  der Parameter  $\mu$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , sodass

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 \quad (3.20)$$

unter der Nebenbedingung in Gleichung (3.19) minimal wird.

Wir schätzen  $\mu$  durch  $\hat{\mu} = \bar{y}$  und  $\alpha_i$  durch  $\hat{\alpha} = \bar{y}_i - \bar{y}$ .

Setzen wir diese Schätzer in Gleichung (3.20) für  $\mu$  und  $\alpha_i$  ein, so erhalten wir die durch das Modell nicht erklärte Streuung:

$$SS_R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

Das Modell in Gleichung (3.18) können wir nun problemlos auf zwei Faktoren erweitern. Hierzu betrachten wir Zufallsvariablen  $Y_{ijk}$  mit  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$  und  $k = 1, \dots, n$ . Der erste Index bezieht sich auf die  $i$ -te Stufe des Faktors  $A$  und der zweite Index auf die  $j$ -te Stufe des Faktors  $B$ . Man nennt das Paar  $(i, j)$  auch Faktorstufenkombination. Es wird gleichzeitig die  $i$ -te Stufe des Faktors  $A$  und die  $j$ -te Stufe des Faktors  $B$  betrachtet. Der Index  $k$  gibt an, um die wievielte Beobachtung es sich auf der betrachteten Faktorstufenkombination es sich handelt. Wir erhalten also folgendes Modell:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \quad (3.21)$$

Wir unterstellen  $E(\epsilon_{ijk}) = 0$  und  $Var(\epsilon_{ijk}) = \sigma^2$ . Außerdem unterstellen wir

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \beta_1 + \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Um  $\alpha_i$  und  $\beta_j$  interpretieren zu können, bezeichnen wir  $E(Y_{ij})$  mit  $\mu_{ij}$ . Es gilt

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j.$$

Mit dieser Notation ist für  $i = 1, 2$

$$\mu_{i\cdot} = 0.5(\mu_{i1} + \mu_{i2})$$

der Erwartungswert von  $Y$ , wenn  $A$  auf der  $i$ -ten Faktorstufe steht. Analog ist für  $j = 1, 2$

$$\mu_{\cdot j} = 0.5(\mu_{1j} + \mu_{2j})$$

der Erwartungswert von  $Y$ , wenn  $B$  auf der  $j$ -ten Faktorstufe steht. Schauen wir uns  $\mu_{i\cdot}$  genauer an. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_{i\cdot} &= 0.5(\mu_{i1} + \mu_{i2}) = 0.5(\mu + \alpha_i + \beta_1 + \mu + \alpha_i + \beta_2) \\ &= 0.5(2\mu + 2\alpha_i + \beta_1 + \beta_2) = \mu + \alpha_i \end{aligned}$$

Also gilt

$$\alpha_i = \mu_{i\cdot} - \mu$$

Somit können wir  $\alpha_i$  als der Effekt der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$  interpretieren.

Für  $\beta_j$  gilt

$$\beta_j = \mu_{\cdot j} - \mu$$

Der Effekt der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$  ist für jede Stufe des Faktors  $B$  gleich. Er hängt also nicht von Stufe ab, auf der der Faktor  $B$  steht. Die gleichen Aussagen gelten für den Effekt der  $j$ -ten Stufe des Faktors  $B$ . Man spricht auch von einem **additiven Modell**.

Bei einfaktoriellen Versuchsplänen haben wir die Effekte der Faktoren betrachtet. Dies ist natürlich auch bei einem zweifaktoriellen Versuchsplan möglich.

Bei der einfaktoriellen Varianzanalyse ist der Effekt von  $A$  gleich der Differenz aus dem dem Erwartungswert von  $Y$ , wenn  $A$  auf + steht, und dem Erwartungswert von  $Y$ , wenn  $A$  auf - steht. Wir wollen diese Definition auf die zweifaktorielle Varianzanalyse übertragen. Der Effekt  $E_A$  von  $A$  ist definiert durch

$$E_A = \mu_{2.} - \mu_{1.} = 0.5(\mu_{21} + \mu_{22}) - 0.5(\mu_{11} + \mu_{12}) \quad (3.22)$$

Entsprechend ist der Effekt  $E_B$  von  $B$  definiert durch:

$$E_B = \mu_{.2} - \mu_{.1} = 0.5(\mu_{12} + \mu_{22}) - 0.5(\mu_{11} + \mu_{21}) \quad (3.23)$$

Wir können Gleichung (3.22) umformen zu

$$E_A = 0.5(\mu_{21} - \mu_{11} + \mu_{22} - \mu_{12}) \quad (3.24)$$

In dieser Form erhalten wir eine andere Interpretation für den Effekt des Faktors  $A$ . Dieser ist der Mittelwert aus dem Effekt  $\mu_{21} - \mu_{11}$  von  $A$ , wenn  $B$  auf - steht, und dem Effekt  $\mu_{22} - \mu_{12}$  von  $A$ , wenn  $B$  auf + steht.

Im additiven Modell gilt

$$\mu_{2j} - \mu_{1j} = \mu + \alpha_2 + \beta_j - \mu - \alpha_1 - \beta_j = \alpha_2 - \alpha_1$$

Somit ist der Effekt von  $A$  auf beiden Stufen von  $B$  gleich  $\alpha_2 - \alpha_1$ .

### Beispiel 13

Es gelte  $\mu_{11} = 3$ ,  $\mu_{21} = 7$ ,  $\mu_{12} = 5$  und  $\mu_{22} = 9$ .

Somit gilt

$$\mu_{22} - \mu_{12} = 9 - 5 = 4$$

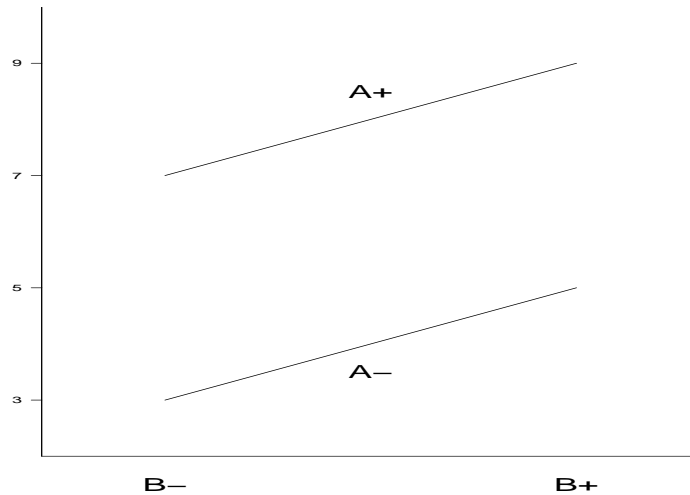
und

$$\mu_{21} - \mu_{11} = 7 - 3 = 4.$$

Also liegt ein additives Modell vor. Abbildung 3.2 veranschaulicht dies.



Abbildung 3.2: Erwartungswerte der Faktorstufenkombinationen bei einem additiven Modell



### 3.3.1.2 Schätzung der Parameter und Effekte

Im Modell in Gleichung (3.21) auf Seite 110 bestimmen wir Schätzer der Parameter  $\mu$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$  so, dass

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 \quad (3.25)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \beta_1 + \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

minimal wird.

Der Schätzer von  $\mu$  ist

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{ijk}. \quad (3.26)$$

Wir schätzen  $\alpha_i$  durch

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y} \quad (3.27)$$

und  $\beta_j$  durch

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}. \quad (3.28)$$

Dabei ist für  $i = 1, 2$

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

und für  $j = 1, 2$

$$\bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{ijk}.$$

Wir schätzen den Effekt von  $A$  durch die Differenz der entsprechenden Mittelwerte:

$$e_A = \bar{y}_{2\cdot} - \bar{y}_{1\cdot}.$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 108)**

Es gilt

$$\bar{y}_{1\cdot} = \frac{1}{4}(42 + 39 + 48 + 43) = 43.$$

und

$$\bar{y}_{2\cdot} = \frac{1}{4}(51 + 53 + 87 + 73) = 66$$

Der geschätzte Effekt von  $A$  ist also

$$e_A = \bar{y}_{2\cdot} - \bar{y}_{1\cdot} = 66 - 43 = 23.$$

Im Mittel werden also 23 Aufgaben mehr gelöst, wenn anstatt einer kleinen Schrift eine große Schrift verwendet.

Entsprechend ist der geschätzte Effekt des Faktors  $B$  gleich

$$e_B = \bar{y}_{\cdot 2} - \bar{y}_{\cdot 1}.$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 113)**

Es gilt

$$\bar{y}_{\cdot 1} = \frac{1}{4}(42 + 39 + 51 + 53) = 46.25.$$

und

$$\bar{y}_{\cdot 2} = \frac{1}{4}(48 + 43 + 87 + 73) = 62.75$$

Der geschätzte Effekt von  $B$  ist also

$$e_B = \bar{y}_{\cdot 2} - \bar{y}_{\cdot 1} = 62.75 - 46.25 = 16.5.$$

Im Mittel werden also 16.5 Aufgaben mehr gelöst, wenn Musik während des Tests lief.

**3.3.1.3 Tests**

Wir wollen testen, ob die Effekte signifikant sind. Der Test auf Signifikanz des Effekts von  $A$  überprüft die Hypothese

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (3.29)$$

und der Test auf Signifikanz des Effekts von  $B$  die Hypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0. \quad (3.30)$$

Die Teststatistiken sind wie bei der einfaktoriellen Varianzanalyse Quotienten aus der durch den jeweiligen Faktor erklärten Streuung zur mittleren nicht durch das Modell erklärten Streuung.

Die Streuung, die nicht durch das Modell in Gleichung (3.18) auf Seite 109 erklärt wird, erhalten wir, indem wir in die Gleichung (3.25) auf Seite 112 für  $\mu$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Schätzer aus den Gleichungen (3.26), (3.27) und (3.28) auf Seite 112 einsetzen. Wir erhalten

$$SS_R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y})^2 \quad (3.31)$$

Der Beweis ist auf Seite 178 zu finden.

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 113)**

Es gilt

$$\begin{aligned} SS_R &= (42 - 43 - 46.25 + 54.5)^2 + (39 - 43 - 46.25 + 54.5)^2 \\ &+ (51 - 66 - 46.25 + 54.5)^2 + (53 - 66 - 46.25 + 54.5)^2 \\ &+ (48 - 43 - 62.75 + 54.5)^2 + (43 - 43 - 62.75 + 54.5)^2 \\ &+ (87 - 66 - 62.75 + 54.5)^2 + (73 - 66 - 62.75 + 54.5)^2 \\ &= 381.5 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade von  $SS_R$  ist  $4n - 3$ .

Um die Hypothese in Gleichung (3.29) zu überprüfen, bestimmen wir

$$SS_A = \sum_{i=1}^2 2n(\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (3.32)$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 114)**

Es gilt

$$SS_A = 2 \cdot 2 \cdot (43 - 54.5)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (66 - 54.5)^2 = 1058$$

Die Teststatistik ist

$$F_A = \frac{SS_A}{SS_R/(4n-3)}$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 114)**

Es gilt

$$F_A = \frac{1058}{381.5/5} = 13.87$$

Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_A \geq F_{1,4n-3;1-\alpha}$ . Dabei ist  $F_{1,4n-3;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $4n - 3$  Freiheitsgraden.

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 115)**

Es gilt  $F_{1,5;0.95} = 6.61$ . Wir lehnen also  $H_0$  ab.

Um die Hypothese in Gleichung (3.30) zu überprüfen, bestimmen wir

$$SS_B = \sum_{j=1}^2 2n(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2 \quad (3.33)$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 115)**

Es gilt

$$SS_B = 2 \cdot 2(46.25 - 54.5)^2 + 2 \cdot 2(62.75 - 54.5)^2 = 544.5$$

Die Teststatistik ist

$$F_B = \frac{SS_B}{SS_R/(4n-3)}$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 115)**

Es gilt

$$F_B = \frac{544.5}{381.5/5} = 7.14$$

Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_B \geq F_{1,4n-3;1-\alpha}$ . Dabei ist  $F_{1,4n-3;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $4n - 3$  Freiheitsgraden.

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 115)**

Es gilt  $F_{1,5;0.95} = 6.61$ . Wir lehnen als  $H_0$  ab.

### 3.3.1.4 Die ANOVA-Tabelle

Wir können die Informationen in einer ANOVA-Tabelle zusammenstellen. Tabelle 3.8 zeigt den allgemeinen Aufbau.

Tabelle 3.8: Allgemeiner Aufbau einer ANOVA-Tabelle im additiven Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$           |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|---------------|
| $A$                  | $SS_A$        | 1              | $MSS_A$                | $MSS_A/MSS_R$ |
| $B$                  | $SS_B$        | 1              | $MSS_B$                | $MSS_B/MSS_R$ |
| Rest                 | $SS_R$        | $4n - 3$       | $MSS_R$                |               |
| Gesamt               | $SS_T$        | $4n - 1$       |                        |               |

### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 115)

Wir erhalten die ANOVA-Tabelle in Tabelle 3.9.

Tabelle 3.9: ANOVA-Tabelle der Daten

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$   |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------|
| $A$                  | 1058          | 1              | 1058                   | 13.87 |
| $B$                  | 544.5         | 1              | 544.5                  | 7.14  |
| Rest                 | 381.5         | 5              | 76.3                   |       |
| Gesamt               | 1984          | 7              |                        |       |

### 3.3.2 Das nichtadditive Modell

#### 3.3.2.1 Motivation

Wir sind im letzten Kapitel davon ausgegangen, dass die Daten durch das additive Modell beschrieben werden können. Dies muss aber nicht der Fall sein. Wir wollen nun das nichtadditive Modell betrachten. Beim additiven Modell hängt der Effekt von  $A$  nicht von den Faktorstufen von  $B$  ab. Er ist also auf jeder Faktorstufe von  $B$  gleich. Nun kann es aber sein, dass der Effekt von  $A$  von den Faktorstufen von  $B$  abhängt.

#### Beispiel 15

Es gelte  $\mu_{11} = 3$ ,  $\mu_{21} = 7$ ,  $\mu_{12} = 9$  und  $\mu_{22} = 5$ .

Somit gilt

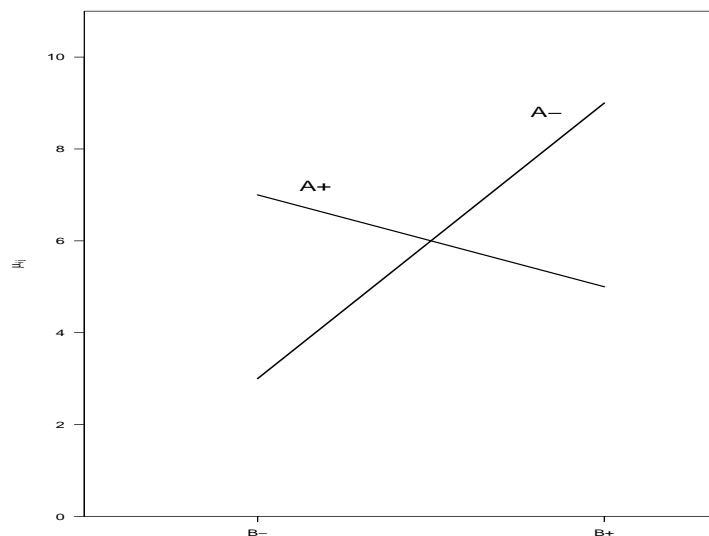
$$\mu_{22} - \mu_{12} = 5 - 9 = -4$$

und

$$\mu_{21} - \mu_{11} = 7 - 3 = 4.$$

Also liegt kein additives Modell vor. Abbildung 3.3 veranschaulicht dies.

Abbildung 3.3: Erwartungswerte der Faktorstufenkombinationen bei einem nichtadditiven Modell



Die Effekte des Faktors  $A$  sind auf den beiden Stufen von  $B$  genau entgegengesetzt. Der Effekt von  $A$  ist aber gleich 0. Dies ist aber eine sinnlose

Aussage, da  $A$  ja Effekte besitzt. Diese hängen aber von den Faktorstufen von  $B$  ab.

Wir sagen auch, dass zwischen den Faktoren  $A$  und  $B$  **Interaktion** vorliegt, wenn der Effekt eines Faktors von den Faktorstufen des anderen Faktors abhängt. In diesem Fall sollte man nicht das additive Modell verwenden.

### 3.3.2.2 Das Modell

Wir unterstellen folgendes Modell:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (3.34)$$

Dabei ist  $(\alpha\beta)_{ij}$  der Interaktionseffekt zwischen der  $i$ -ten Stufe des Faktors  $A$  und der  $j$ -ten Stufe des Faktors  $B$ .

Um eindeutige Schätzer der Parameter zu erhalten, benötigen wir folgende Nebenbedingungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (3.35)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \quad (3.36)$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{12} = 0 \quad (3.37)$$

$$(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \quad (3.38)$$

$$(\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21} = 0 \quad (3.39)$$

$$(\alpha\beta)_{21} + (\alpha\beta)_{22} = 0 \quad (3.40)$$

Der Effekt  $E_A$  von  $A$  ist definiert durch

$$E_A = \mu_{.2} - \mu_{.1} = 0.5(\mu_{21} + \mu_{22}) - 0.5(\mu_{11} + \mu_{12}) \quad (3.41)$$

Entsprechend ist der Effekt  $E_B$  von  $B$  definiert durch:

$$E_B = \mu_{.2} - \mu_{.1} = 0.5(\mu_{12} + \mu_{22}) - 0.5(\mu_{11} + \mu_{21}) \quad (3.42)$$

Der Interaktionseffekt  $E_{AB}$  ergibt sich wie folgt:

$$E_{AB} = 0.5(\mu_{22} - \mu_{12} - (\mu_{21} - \mu_{11})) = 0.5(\mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22}) \quad (3.43)$$

Dieser gibt an, wie sich der Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf + steht, vom Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf - steht, unterscheidet.

Wir können  $E_{AB}$  auch umformen zu

$$E_{AB} = 0.5(\mu_{22} - \mu_{21} - (\mu_{12} - \mu_{11}))$$

In dieser Darstellung gibt  $E_{AB}$  an, wie sich der Effekt von  $B$ , wenn  $A$  auf + steht, vom Effekt von  $B$ , wenn  $A$  auf - steht, unterscheidet.

### 3.3.2.3 Schätzung der Parameter und Effekte

Im Modell in Gleichung (3.34) auf Seite 118 bestimmen wir Schätzer der Parameter  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  und  $(\alpha\beta)_{ij}$  so, dass

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2 \quad (3.44)$$

unter den Nebenbedingungen in den Gleichungen (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) und (3.40) minimiert wird.

Die Schätzer von  $\mu$ ,  $\alpha_i$  und  $\beta_j$  sind mit denen im additiven Modell identisch. Es gilt also:

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad (3.45)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y} \quad (3.46)$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y} \quad (3.47)$$

Der Schätzer  $(\widehat{\alpha\beta})_{ij}$  von  $(\alpha\beta)_{ij}$  ist

$$(\widehat{\alpha\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y} \quad (3.48)$$

Die Schätzer  $e_A$  und  $e_B$  sind im additiven und nichtadditiven Modell identisch. Es gilt also

$$e_A = \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.}$$

und

$$e_B = \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{.1}.$$

#### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 116)

Es gilt

$$e_A = \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 66 - 43 = 23$$

und

$$e_B = \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{.1} = 62.75 - 46.25 = 16.5.$$

Wir schätzen den Interaktionseffekt  $E_{AB}$  zwischen den Faktoren  $A$  und  $B$  durch

$$e_{AB} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{11} - \bar{y}_{21} - \bar{y}_{12} + \bar{y}_{22})$$

Dabei ist

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$



Wir können den geschätzten Interaktionseffekt auch schreiben als

$$e_{AB} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{22} - \bar{y}_{12} - (\bar{y}_{21} - \bar{y}_{11})) \quad (3.49)$$

Wir bilden also die Hälfte der Differenz aus dem Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf + steht, und dem Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf - steht.

Auch hier ist wieder eine andere Darstellung möglich

$$e_{AB} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{22} - \bar{y}_{21} - (\bar{y}_{12} - \bar{y}_{11})) \quad (3.50)$$

Wir bilden also die Hälfte der Differenz aus dem Effekt von  $B$ , wenn  $A$  auf + steht, und dem Effekt von  $B$ , wenn  $A$  auf - steht.

### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 119)

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{y}_{11} &= \frac{42 + 39}{2} = 40.5 & , & \quad \bar{y}_{12} = \frac{48 + 43}{2} = 45.5 \\ \bar{y}_{21} &= \frac{51 + 53}{2} = 52.0 & , & \quad \bar{y}_{22} = \frac{87 + 73}{2} = 80.0 \end{aligned}$$

Also ist der geschätzte Interaktionseffekt zwischen den Faktoren  $A$  und  $B$  gegeben durch

$$\frac{1}{2} (\bar{y}_{11} - \bar{y}_{21} - \bar{y}_{12} + \bar{y}_{22}) = \frac{1}{2} (40.5 - 52 - 45.5 + 80) = 11.5$$

Der geschätzte Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf - steht, ist

$$\bar{y}_{21} - \bar{y}_{11} = 52 - 40.5 = 11.5 .$$

Wenn keine Musik läuft, werden also bei großer Schrift im Mittel 11.5 Aufgaben mehr gelöst als bei kleiner Schrift.

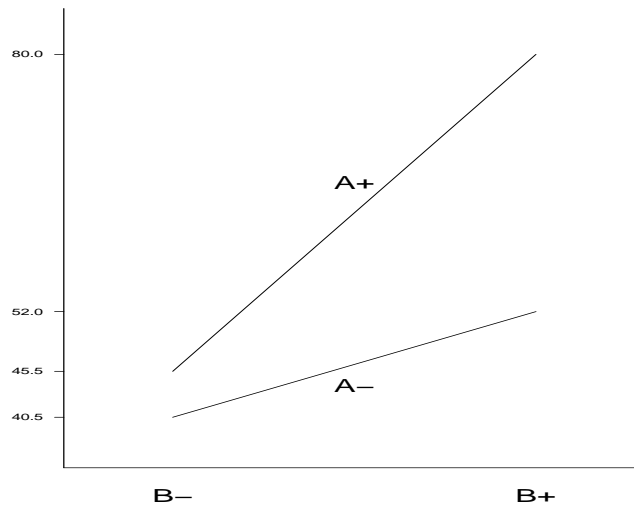
Der geschätzte Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf + steht, ist

$$\bar{y}_{22} - \bar{y}_{12} = 80 - 45.5 = 34.5 .$$

Wenn Musik läuft, werden also bei großer Schrift im Mittel 34.5 Aufgaben mehr gelöst als bei kleiner Schrift.

Wir können ein **Interaktionsdiagramm** erstellen. Dieses ist in Abbildung 3.4 zu finden.

Abbildung 3.4: Interaktionsdiagramm



Wir sehen, dass der Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf  $+$  steht, viel größer ist als der Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf  $-$  steht.

### 3.3.2.4 Tests

Nun können wir uns der Frage zuwenden, ob die Effekte signifikant sind. Wir benötigen  $SS_A$ ,  $SS_B$ ,  $SS_{AB}$  und  $SS_R$ .  $SS_A$  und  $SS_B$  sind im additiven und nichtadditiven Modell identisch. Es gilt also

$$SS_A = \sum_{i=1}^2 2n(\bar{y}_{i.} - \bar{y})^2$$

und

$$SS_B = \sum_{j=1}^2 2n(\bar{y}_{.j} - \bar{y})^2.$$

Die Streuung, die nicht durch das Modell in Gleichung (3.34) auf Seite 118 erklärt wird, erhalten wir, indem wir in die Gleichung (3.44) auf Seite 119 für  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  und  $(\alpha\beta)_{ij}$  die Schätzer aus den Gleichungen (3.45), (3.46), (3.47)

und (3.48) auf Seite 119 einsetzen. Es gilt

$$SS_R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2. \quad (3.51)$$

Der Beweis ist auf Seite 178 zu finden.

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 120)**

Es gilt

$$\begin{aligned} SS_R &= (42 - 40.5)^2 + (39 - 40.5)^2 + (48 - 45.5)^2 + (43 - 45.5)^2 \\ &+ (51 - 52)^2 + (53 - 52)^2 + (87 - 80)^2 + (73 - 80)^2 \\ &= 117 \end{aligned}$$

Auf jeder der 4 Faktorstufenkombinationen gibt es  $n$  Beobachtungen, von denen  $n - 1$  frei wählbar ist, wenn der Mittelwert der Faktorstufenkombination bekannt ist. Von den  $4n$  Sumanden in  $SS_R$  können wir also  $4n - 4$  frei wählen.

Zum Test auf Interaktion benötigen wir noch  $SS_{AB}$ . Es gilt

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y})^2.$$

Dabei gilt

$$\bar{y} = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 122)**

Es gilt

$$\begin{aligned} SS_{AB} &= 2(40.5 - 43 - 46.25 + 54.5)^2 + 2(52 - 66 - 46.25 + 54.5)^2 \\ &+ 2(45.5 - 43 - 62.75 + 54.5)^2 + 2(80 - 66 - 62.75 + 54.5)^2 \\ &= 264.5 \end{aligned}$$

Wir überprüfen zunächst, ob Interaktion vorliegt. Wir testen also

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2$$

Die Teststatistik ist

$$F_{AB} = \frac{SS_{AB}}{SS_R/(4n - 4)}$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 122)**

Es gilt

$$F_{AB} = \frac{264.5}{117/4} = 9.04$$

Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_{AB} \geq F_{1,4n-4;1-\alpha}$ . Dabei ist  $F_{1,4n-4;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $4n - 4$  Freiheitsgraden.

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 123)**

Es gilt  $F_{1,4;0,95} = 7.71$ . Wir lehnen  $H_0$  ab.

Lehnen wir  $H_0$  ab, so spricht dies für Interaktion. Es ist in diesem Fall nicht sinnvoll nach dem Effekt von  $A$  oder dem Effekt von  $B$  zu fragen, da diese von den Faktorstufen des jeweils anderen Faktors abhängen.

Lehnen wir  $H_0$  nicht ab, so überprüfen wir, ob der Effekt  $A$  oder der Effekt von  $B$  signifikant von 0 verschieden ist.

Beginnen wir mit

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Die Teststatistik ist

$$F_A = \frac{SS_A}{SS_R/(4n - 4)}$$

Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_A \geq F_{1,4n-4;1-\alpha}$ . Dabei ist  $F_{1,4n-4;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $4n - 4$  Freiheitsgraden.

Zum Überprüfen der Hypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

bestimmen wir die Teststatistik

$$F_B = \frac{SS_B}{SS_R/(4n - 4)}.$$

Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_B \geq F_{1,4n-4;1-\alpha}$ . Dabei ist  $F_{1,4n-4;1-\alpha}$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit 1 und  $4n - 4$  Freiheitsgraden.

### 3.3.2.5 Die ANOVA-Tabelle

Wir können die Informationen in einer ANOVA-Tabelle zusammenstellen. Tabelle 3.10 zeigt den allgemeinen Aufbau.

Tabelle 3.10: Allgemeiner Aufbau einer ANOVA-Tabelle

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$              |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|------------------|
| $A$                  | $SS_A$        | 1              | $MSS_A$                | $MSS_A/MSS_R$    |
| $B$                  | $SS_B$        | 1              | $MSS_B$                | $MSS_B/MSS_R$    |
| $AB$                 | $SS_{AB}$     | 1              | $MSS_{AB}$             | $MSS_{AB}/MSS_R$ |
| Rest                 | $SS_R$        | $4n - 4$       | $MSS_R$                |                  |
| Gesamt               | $SS_T$        | $4n - 1$       |                        |                  |

### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 123)

Wir erhalten die ANOVA-Tabelle in Tabelle 3.11.

Tabelle 3.11: Allgemeiner Aufbau einer ANOVA-Tabelle

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$   |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------|
| $A$                  | 1058.0        | 1              | 1058.00                | 36.17 |
| $B$                  | 544.5         | 1              | 544.50                 | 18.62 |
| $AB$                 | 264.5         | 1              | 264.50                 | 9.04  |
| Rest                 | 117.0         | 4              | 19.25                  |       |
| Gesamt               | 1984          | 7              |                        |       |

### 3.3.2.6 Der Algorithmus von Yates

Wir hatten bei einfaktoriellen Versuchsplänen die Notation (1) und  $a$  eingeführt. Wir können diese jetzt auf zweifaktorielle Versuchspläne erweitern. Taucht in einer Symbolfolge der Kleinbuchstabe eines Faktors auf, so steht dieser Faktor auf +. Ansonsten steht er auf -. Stehen alle Faktoren auf -, so verwenden wir das Symbol (1). Die Symbolfolgen stehen dann wieder für die Summe der Werte auf der jeweiligen Faktorstufenkombination. Es gilt also

$$(1) = \sum_{k=1}^n y_{11k} \quad a = \sum_{k=1}^n y_{21k} \quad b = \sum_{k=1}^n y_{12k} \quad ab = \sum_{k=1}^n y_{22k}$$

#### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 124)

Es gilt

$$(1) = 81 \quad a = 104 \quad b = 91 \quad ab = 160$$

Wir können auch die geschätzten Effekte in dieser Notation darstellen. Schauen wir uns zuerst die Mittelwerte auf den einzelnen Faktorstufen an. Es gilt

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{2n} \left( \sum_{k=1}^n y_{i1k} + \sum_{k=1}^n y_{i2k} \right)$$

und

$$\bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{2n} \left( \sum_{k=1}^n y_{1jk} + \sum_{k=1}^n y_{2jk} \right).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1\cdot} &= \frac{(1) + b}{2n} & \bar{y}_{2\cdot} &= \frac{a + ab}{2n} \\ \bar{y}_{\cdot 1} &= \frac{(1) + a}{2n} & \bar{y}_{\cdot 2} &= \frac{b + ab}{2n} \end{aligned}$$

Der geschätzte Effekt von  $A$  ist somit

$$e_A = \bar{y}_{2\cdot} - \bar{y}_{1\cdot} = \frac{a + ab - (1) - b}{2n} = \frac{-(1) + a - b + ab}{2n}.$$

Man nennt  $K_A = -(1) + a - b + ab$  auch den Kontrast  $K_A$  von  $A$ .

#### Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 125)

Es gilt  $K_A = 92$ . Also gilt

$$e_A = \frac{92}{4} = 23.$$

Der geschätzte Effekt von  $B$  ist

$$e_B = \bar{y}_{.2} - \bar{y}_{.1} = \frac{b + ab - (1) - a}{2n} = \frac{-(1) - a + b + ab}{2n}.$$

Man nennt  $K_B = -(1) - a + b + ab$  auch den Kontrast  $K_B$  von  $B$ .

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 125)**

Es gilt  $K_B = 66$ . Also gilt

$$e_B = \frac{66}{4} = 16.5.$$

Der geschätzte Effekt von  $AB$  ist

$$e_{AB} = \frac{\bar{y}_{11} - \bar{y}_{21} - \bar{y}_{12} + \bar{y}_{22}}{2} = \frac{(1) - a - b - ab}{2n}.$$

Man nennt  $K_{AB} = (1) - a - b + ab$  auch den Kontrast  $K_{AB}$  von  $AB$ .

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 126)**

Es gilt  $K_{AB} = 46$ . Also gilt

$$e_{AB} = \frac{46}{4} = 11.5.$$

Wir können auch die Quadratsummen in dieser Notation darstellen. Es gilt

$$SS_A = \frac{(-(1) + a - b + ab)^2}{4n} \quad (3.52)$$

Der Beweis dieser Beziehung ist auf Seite 179 zu finden.

Mit  $K_A = -(1) + a - b + ab$  gilt also

$$SS_A = \frac{K_A^2}{4n}.$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 126)**

Mit  $K_A = 92$  gilt  $SS_A = (92^2)/8 = 1058$ .

Mit  $K_B = -(1) - a + b + ab$  gilt

$$SS_B = \frac{K_B^2}{4n}$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 126)**

Mit  $K_B = 66$  gilt  $SS_B = (66^2)/8 = 544.5$ .

Mit  $K_{AB} = (1) - a - b + ab$  gilt

$$SS_{AB} = \frac{K_{AB}^2}{4n}.$$

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 126)**

Mit  $K_{AB} = 46$  gilt  $SS_{AB} = (46^2)/8 = 264.5$ .

Bei einem  $2^k$ -Plan betrachten wir  $k$  Faktoren mit jeweils 2 Faktorstufen. Werden auf jeder Faktorstufe  $n$  Beobachtungen gemacht, so gilt

$$e_{Faktor} = \frac{K_{Faktor}}{n 2^{k-1}} \tag{3.53}$$

und

$$SS_{Faktor} = \frac{K_{Faktor}^2}{n 2^k} \tag{3.54}$$

Wir können die Kontraste mit dem Algorithmus von Yates bestimmen. Wir stellen die folgende Tabelle auf:

Tabelle 3.12: Faktorstufenkombinationen bei einem zweifaktoriellen Versuchsplan

|     |  |
|-----|--|
| (1) |  |
| a   |  |
| b   |  |
| ab  |  |

**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 127)**

Wir erhalten folgende Tabelle 3.13.

Tabelle 3.13: Faktorstufenkombinationen bei einem zweifaktoriellen Versuchsplan

|     |     |  |
|-----|-----|--|
| (1) | 81  |  |
| a   | 104 |  |
| b   | 91  |  |
| ab  | 160 |  |



Wir können den Algorithmus von Yates auch bei zwei Faktoren verwenden. Wir beginnen mit der ersten Spalte.

1. Wir summieren die ersten Zahlen dieser Spalte und schreiben sie in die erste Zeile der nächsten Spalte.
2. Wir summieren die nächsten beiden Zahlen und schreiben das Ergebnis in die zweite Zeile der nächsten Spalte.
3. Wir nehmen die nächsten beiden Zahlen, bilden die Differenz aus der unteren und der oberen und schreiben das Ergebnis in die zweite Zeile der nächsten Spalte.
4. Wir nehmen die nächsten beiden Zahlen, bilden die Differenz aus der unteren und der oberen und schreiben das Ergebnis in die zweite Zeile der nächsten Spalte.

Wir gehen mit der zweiten Spalte genau so vor wie mit der ersten. Nach diesem Schritt stehen in der letzten Spalte die Kontraste der Faktoren.

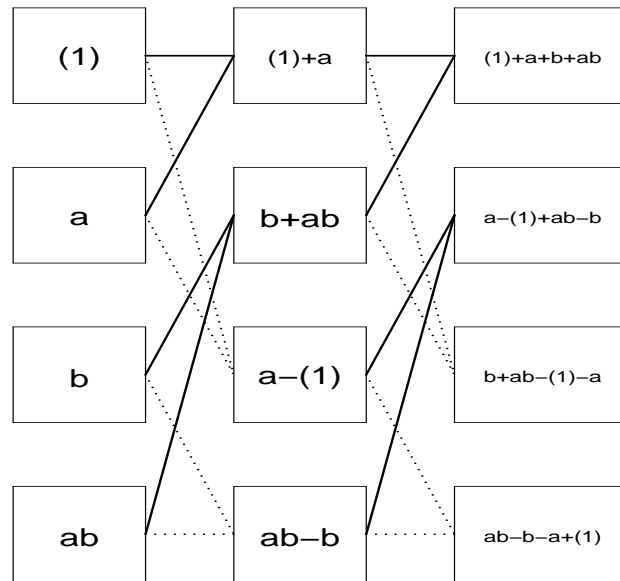
Wir erhalten also folgende Schritte

Tabelle 3.14: Faktorstufenkombinationen bei einem zweifaktoriellen Versuchsplan

|     |         |                  |
|-----|---------|------------------|
| (1) | (1) + a | (1) + a + b + ab |
| a   | b + ab  | a - (1) + ab - b |
| b   | a - (1) | b + ab - (1) - a |
| ab  | ab - b  | ab - b - a + (1) |

Abbildung 3.5 illustriert die Vorgehensweise beim Yates-Algorithmus. Dabei bedeutet eine durchgezogene Linie Addition und eine gestrichelte Linie Subtraktion.

Abbildung 3.5: Der Algorithmus von Yates



**Beispiel 12 (fortgesetzt von Seite 127)**

Tabelle 3.15 zeigt die einzelnen Schritte.

Tabelle 3.15: Algorithmus von Yates bei einem zweifaktoriellen Versuchsplan

|           |     |     |     |
|-----------|-----|-----|-----|
| (1)       | 81  | 185 | 436 |
| <i>a</i>  | 104 | 251 | 92  |
| <i>b</i>  | 91  | 23  | 66  |
| <i>ab</i> | 160 | 69  | 46  |

**3.3.2.7 Der Fall  $n = 1$** 

Wir betrachten nun noch den Fall  $n = 1$ . Hier beobachten wir  $y_{ij1}$  für  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2$ . Das Modell lautet:

$$Y_{ij1} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij1} + \epsilon_{ij1} \quad (3.55)$$

Wir könnten im Prinzip auf den letzten Index verzichten, da er immer gleich 1 ist. Wenn wir ihn aber beibehalten, so können wir eine wichtige Konsequenz für  $SS_R$  im Fall  $n = 1$  illustrieren. Es gilt

$$SS_R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2.$$

Da auf jeder Faktorstufenkombination nur eine Beobachtung gemacht wurde, gilt  $y_{ij1} = \bar{y}_{ij}$ . Dies hat zur Konsequenz, dass  $SS_R = 0$  gilt.

Ist  $n = 1$ , so kann man im nichtadditiven Modell nicht testen. Ein Ausweg besteht darin, ein additives Modell zu unterstellen. Man sollte sich aber sicher sein, dass der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$  vernachlässigt werden kann.

**3.3.3 Zweifaktorielle Varianzanalyse in R**

Um eine zweifaktorielle Varianzanalyse durchführen zu können, benötigen wir einen Variable, die den zweiten Faktor beschreibt. Der Faktor  $B$  steht bei der ersten, zweiten, fünften und sechsten Komponente von `Anzahl` auf `-`. Ansonsten steht er auf `+`. Wir erzeugen eine Variable  $B$ , die diese Eigenschaft besitzt.

```
> B<-rep(rep(c(-1,1),c(2,2)),2)
> B
[1] -1 -1  1  1 -1 -1  1  1
```

und machen einen Faktor aus B

```
> B<-factor(B)
> B
[1] -1 -1  1  1 -1 -1  1  1
Levels: -1 1
```

Nun können wir die Funktion `aov` aufrufen. Die ANOVA-Tabelle des additiven Modells erhalten wir durch

```
> summary(aov(Anzahl~A+B))
```

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)    |
|-----------|----|--------|---------|---------|-----------|
| A         | 1  | 1058.0 | 1058.0  | 13.8663 | 0.01366 * |
| B         | 1  | 544.5  | 544.5   | 7.1363  | 0.04427 * |
| Residuals | 5  | 381.5  | 76.3    |         |           |

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Die ANOVA-Tabelle des nichtadditiven Modells erhalten wir durch

```
> summary(aov(Anzahl~A+B+A*B))
```

|           | Df | Sum Sq  | Mean Sq | F value | Pr(>F)      |
|-----------|----|---------|---------|---------|-------------|
| A         | 1  | 1058.00 | 1058.00 | 36.1709 | 0.003849 ** |
| B         | 1  | 544.50  | 544.50  | 18.6154 | 0.012501 *  |
| A:B       | 1  | 264.50  | 264.50  | 9.0427  | 0.039663 *  |
| Residuals | 4  | 117.00  | 29.25   |         |             |

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

### 3.4 $2^k$ -Pläne mit $k > 2$

Im letzten Kapitel haben wir gelernt, wie man einen  $2^2$ -Plan analysiert. Die Vorgehensweise ist bei einem  $2^k$ -Plan mit  $k > 2$  identisch. Es wird alles nur unübersichtlicher. Wir illustrieren die wesentlichen Aspekte am Beispiel des  $2^3$ -Plans.

#### 3.4.1 Das Modell

Man benötigt bei einem  $2^k$ -Plan zur Beschreibung der Beobachtungen  $k$  Indizes, falls  $n = 1$  gilt, und  $k + 1$  Indizes, falls  $n$  größer als 1 ist.

Bei einem  $2^3$ -Plan mit  $n = 1$  betrachten wir  $Y_{ijk}$ . Dabei bezieht sich der  $r$ -te Index auf die Faktorstufen des  $r$ -ten Faktors. Ist  $n > 1$ , so wählen wir  $Y_{ijkl}$ . Dabei beziehen sich die ersten 3 Indizes auf die drei Faktoren, während der letzte Index sich auf die  $l$ -te Beobachtung auf dieser Faktorstufenkombination bezieht.

Bei einem  $2^k$ -Plan enthält die Definitionsgleichung des Modells  $2^k + 1$  Summanden. Wir schreiben die Modelle nicht mehr hin, sondern schauen uns die Effekte an.

#### 3.4.2 Die Effekte

##### 3.4.2.1 Die Haupteffekte

Wir definieren die Effekte bei einem  $2^k$ -Plan mit  $k > 2$  wie bei einem  $2^2$ -Plan. Schauen wir uns auch hier einen  $2^3$ -Plan an. Sei  $\mu_{ijk} = E(X_{ijk})$ . Dann können wir den Erwartungswert von  $Y$ , wenn  $A$  auf - steht, folgendermaßen definieren:

$$\mu_{1..} = \frac{1}{4}(\mu_{111} + \mu_{121} + \mu_{112} + \mu_{122})$$

Wenn  $A$  auf + steht, erhalten wir

$$\mu_{2..} = \frac{1}{4}(\mu_{211} + \mu_{221} + \mu_{212} + \mu_{222})$$

Der Effekt  $E_A$  von  $A$  ist dann

$$\begin{aligned} E_A &= \mu_{2..} - \mu_{1..} \\ &= \frac{1}{4}(\mu_{211} + \mu_{221} + \mu_{212} + \mu_{222}) - \frac{1}{4}(\mu_{111} + \mu_{121} + \mu_{112} + \mu_{122}) \\ &= \frac{1}{4}(-\mu_{111} + \mu_{211} - \mu_{121} + \mu_{221} - \mu_{112} + \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222}) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir dann die Effekte von  $B$

$$E_B = \frac{1}{4}(-\mu_{111} - \mu_{211} + \mu_{121} + \mu_{221} - \mu_{112} - \mu_{212} + \mu_{122} + \mu_{222})$$

und  $C$

$$E_C = \frac{1}{4}(-\mu_{111} - \mu_{211} - \mu_{121} - \mu_{221} + \mu_{112} + \mu_{212} + \mu_{122} + \mu_{222})$$

Für  $k > 3$  geht man analog vor. Die Anzahl der Summanden wird nur größer.

**Schreiben Sie den Effekt von  $B$  bei einem  $2^4$ -Plan auf.**

### 3.4.2.2 Die Interaktionseffekte zwischen zwei Faktoren

Schauen wir uns die Interaktionseffekte zwischen zwei Faktoren an. Bei  $k$  Faktoren gibt es  $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$  Interaktionseffekte zwischen zwei Faktoren. Für  $k = 3$  sind es die Interaktionseffekte  $E_{AB}$ ,  $E_{AC}$  und  $E_{BC}$ .

Wie können wir diese bei einem  $2^3$ -Plan definieren? Schauen wir uns exemplarisch  $E_{AB}$  an. Bei einem  $2^2$ -Plan vergleichen wir den Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf + steht, mit Effekt von  $A$ , wenn  $B$  auf - steht. Es gilt also

$$E_{AB} = \frac{1}{2}(\mu_{22} - \mu_{12} - (\mu_{21} - \mu_{11}))$$

Diese Definition können wir direkt auf einen  $2^3$ -Plan übertragen, indem wir  $\mu_{ij}$  durch  $\mu_{ij\cdot}$  ersetzen. Dabei ist

$$\mu_{ij\cdot} = \frac{1}{2}(\mu_{ij1} + \mu_{ij2})$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} E_{AB} &= \frac{1}{2}(\mu_{22\cdot} - \mu_{12\cdot} - (\mu_{21\cdot} - \mu_{11\cdot})) \\ &= \frac{1}{4}(\mu_{111} - \mu_{211} - \mu_{121} + \mu_{221} + \mu_{112} - \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222}) \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir

$$E_{AC} = \frac{1}{4}(\mu_{111} - \mu_{211} + \mu_{121} - \mu_{221} - \mu_{112} + \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222})$$

und

$$E_{BC} = \frac{1}{4}(\mu_{111} + \mu_{211} - \mu_{121} - \mu_{221} - \mu_{112} - \mu_{212} + \mu_{122} + \mu_{222})$$

**Schreiben Sie den Interaktionseffekt zwischen  $B$  und  $C$  bei einem  $2^4$ -Plan auf.**

**3.4.2.3 Interaktionseffekte zwischen mehr als zwei Faktoren**

Nun kommen wir zum Interaktionseffekt  $E_{ABC}$  zwischen allen drei Faktoren. Beim Interaktionseffekt zwischen zwei Faktoren vergleichen wir den Effekt des einen Faktors auf den beiden Stufen des anderen Faktors. Beim Interaktionseffekt zwischen drei Faktoren vergleichen wir den Interaktionseffekt zwischen zwei Faktoren auf den Stufen des dritten Faktors. Wir vergleichen also den Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht, mit dem Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht.

Der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht, ist

$$\frac{1}{2}(\mu_{112} - \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222})$$

Den Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht, ist

$$\frac{1}{2}(\mu_{111} - \mu_{211} - \mu_{121} + \mu_{221})$$

Also ist

$$\begin{aligned} E_{ABC} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(\mu_{112} - \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222}) - \frac{1}{2}(\mu_{111} - \mu_{211} - \mu_{121} + \mu_{221}) \right] \\ &= \frac{1}{4}(-\mu_{111} + \mu_{211} + \mu_{121} - \mu_{221} + \mu_{112} - \mu_{212} - \mu_{122} + \mu_{222}) \end{aligned}$$

Es liegt keine Interaktion zwischen allen drei Faktoren vor, wenn der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht, und der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht, identisch sind.

Jeder Effekt ist eine Linearkombination aller  $\mu_{ijk}$ . Die Vorzeichenstruktur ist in Tabelle 3.16 zu finden.

Tabelle 3.16: Daten eines  $2^3$ -Plans mit  $n = 2$

| $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AC$ | $BC$ | $ABC$ |
|-----|-----|-----|------|------|------|-------|
| -   | -   | -   | +    | +    | +    | -     |
| +   | -   | -   | -    | -    | +    | +     |
| -   | +   | -   | -    | +    | -    | +     |
| +   | +   | -   | +    | -    | -    | -     |
| -   | -   | +   | +    | -    | -    | +     |
| +   | -   | +   | -    | +    | -    | -     |
| -   | +   | +   | -    | -    | +    | -     |
| +   | +   | +   | +    | +    | +    | +     |

Wenn wir in Tabelle 3.16 zum Beispiel die Vorzeichen von  $A$  und  $B$  multiplizieren, so erhalten wir die Vorzeichen von  $AB$ . Dies gilt nicht nur für Tabelle 3.16, sondern für jeden  $2^k$ -Plan.

**Schreiben Sie die Vorzeichenstruktur der Faktoren  $A$ ,  $B$  und  $D$  bei einem  $2^4$ -Plan auf. Bestimmen Sie die Vorzeichenstruktur von  $AB$  und  $ABD$ .**

### 3.4.3 Ein Beispiel

#### Beispiel 13

Dorin und Neuhaus betrachteten in ihrer Arbeit folgende drei Faktoren

A : Schriftgröße mit den Faktorstufen  $8\text{ pt}$  (-) und  $16\text{ pt}$  (+)

B : Musik mit den Faktorstufen  $aus$  (-) und  $an$  (+)

C : Wasser getrunken mit den Faktorstufen  $nein$  (-) und  $ja$  (+).

Es gibt  $2^3 = 8$  Faktorstufenkombinationen. Auf jeder wurden zwei Beobachtungen gemacht. Die Daten sind in Tabelle 3.17 zu finden.

Tabelle 3.17: Daten eines  $2^3$ -Plans mit  $n = 2$

| $A$ | $B$ | $C$ | Anzahl |    |
|-----|-----|-----|--------|----|
| -   | -   | -   | 47     | 42 |
| +   | -   | -   | 49     | 53 |
| -   | +   | -   | 48     | 43 |
| +   | +   | -   | 52     | 87 |
| -   | -   | +   | 51     | 39 |
| +   | -   | +   | 43     | 51 |
| -   | +   | +   | 52     | 48 |
| +   | +   | +   | 69     | 73 |

### 3.4.4 Schätzen der Effekte

Die Schätzer der Effekte erhält man, indem man auf jeder Faktorstufenkombination den Mittelwert bestimmt und diese Mittelwerte in die Definitionsgleichungen der Effekte einsetzt. Bei einem  $2^3$ -Plan ist der Schätzer  $e_A$  des Effekts  $E_A$  also:

$$e_A = \frac{1}{4} (-\bar{y}_{111} + \bar{y}_{211} - \bar{y}_{121} + \bar{y}_{221} - \bar{y}_{112} + \bar{y}_{212} - \bar{y}_{122} + \bar{y}_{222})$$



und der Schätzer  $e_{ABC}$  des Effekts  $E_{ABC}$  also:

$$e_{ABC} = \frac{1}{4} (-\bar{y}_{111} + \bar{y}_{211} + \bar{y}_{121} - \bar{y}_{221} + \bar{y}_{112} - \bar{y}_{212} - \bar{y}_{122} + \bar{y}_{222})$$

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 135)**

Es gilt

$$\bar{y}_{111} = 44.5 \quad \bar{y}_{211} = 51 \quad \bar{y}_{121} = 45.5 \quad \bar{y}_{221} = 69.5$$

$$\bar{y}_{112} = 45 \quad \bar{y}_{212} = 47 \quad \bar{y}_{122} = 50 \quad \bar{y}_{222} = 71$$

Also gilt

$$e_A = \frac{1}{4} (-44.5 + 51 - 45.5 + 69.5 - 45 + 47 - 50 + 71) = 13.375$$

und

$$e_{ABC} = \frac{1}{4} (-44.5 + 51 + 45.5 - 69.5 + 45 - 47 - 50 + 71) = 0.375$$

Schauen wir uns diesen Effekt noch einmal genauer an. Er setzt sich aus dem Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf - steht, und dem Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf + steht, zusammen.

Der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf - steht, ist

$$\frac{1}{2} (\bar{y}_{111} - \bar{y}_{211} - \bar{y}_{121} + \bar{y}_{221}) = \frac{1}{2} (44.5 - 51 - 45.5 + 69.5) = 8.75$$

Der Interaktionseffekt zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf + steht, ist

$$\frac{1}{2} (\bar{y}_{112} - \bar{y}_{212} - \bar{y}_{122} + \bar{y}_{222}) = \frac{1}{2} (45 - 47 - 50 + 71) = 9.5$$

Also gilt

$$e_{ABC} = 0.5(9.5 - 8.75) = 0.375$$

Wir können den geschätzten Effekt  $e_{ABC}$  auch grafisch darstellen. Hierzu zeichnen wir das Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht und das Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht.

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 136)**

Abbildung 3.6 zeigt das Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht, und Abbildung 3.7 das Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht.

Abbildung 3.6: Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $-$  steht.

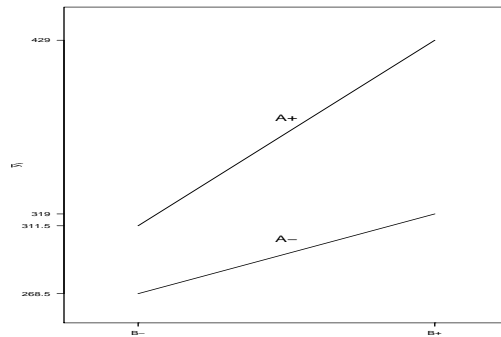
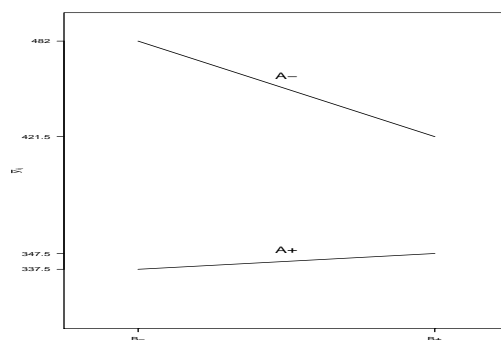


Abbildung 3.7: Interaktionsdiagramm zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $C$  auf  $+$  steht.



Die beiden Abbildungen sind sehr ähnlich, was darauf hindeutet, dass  $E_{ABC}$  gleich 0 ist.

### 3.4.5 Der Algorithmus von Yates

Wir können die Effekte aber auch mit dem Algorithmus von Yates bestimmen. Dieser liefert uns die Kontraste aller Faktoren beziehungsweise Faktorkombinationen.

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 137)**

Wir bilden auf jeder Faktorstufenkombination die Summe der Beobachtungen, erstellen die Tabelle und führen die einzelnen Schritten durch. Bei einem  $2^3$ -Plan müssen wir drei Spalten erzeugen.

Tabelle 3.18: Algorithmus von Yates bei einem  $2^3$ -Plan

|            |     |     |     |     |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| (1)        | 89  | 191 | 421 | 847 |
| <i>a</i>   | 102 | 230 | 426 | 107 |
| <i>b</i>   | 91  | 184 | 61  | 97  |
| <i>ab</i>  | 139 | 242 | 46  | 73  |
| <i>c</i>   | 90  | 13  | 39  | 5   |
| <i>ac</i>  | 94  | 48  | 58  | -15 |
| <i>bc</i>  | 100 | 4   | 35  | 19  |
| <i>abc</i> | 142 | 42  | 38  | 3   |

Mit den Kontrasten können wir problemlos die Schätzer der Effekte und die Quadratsummen bestimmen, die wir zum Testen benötigen.

Beginnen wir mit den Effekten. Werden auf jeder Faktorstufenkombination  $n$  Beobachtungen gemacht, so gilt

$$e_F = \frac{K_F}{n 2^{k-1}} \tag{3.56}$$

Dabei ist  $F$  entweder ein Faktor wie  $A$  oder eine Interaktion wie  $AB$ .

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 138)**

Somit gilt

$$e_A = 107/8 = 13.375 \quad e_B = 97/8 = 12.125 \quad e_C = 5/8 = 0.625$$

$$e_{AB} = 73/8 = 9.125 \quad e_{AC} = -15/8 = -1.875$$

$$e_{BC} = 19/8 = 2.375 \quad e_{ABC} = 3/8 = 0.375$$

### 3.4.6 Tests

Kommen wir zu den Quadratsummen. Werden auf jeder Faktorstufe  $n$  Beobachtungen gemacht, so gilt

$$SS_F = \frac{K_F^2}{n 2^k} \quad (3.57)$$

#### Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 138)

Somit gilt

$$\begin{aligned} SS_A &= 107^2/16 = 715.5625 \\ SS_B &= 97^2/16 = 588.0625 \\ SS_C &= 5^2/16 = 1.5625 \\ SS_{AB} &= 73^2/16 = 333.0625 \\ SS_{AC} &= (-15)^2/16 = 14.0625 \\ SS_{BC} &= 19^2/16 = 22.5625 \\ SS_{ABC} &= 3^2/16 = 0.5625 \end{aligned}$$

Nur  $SS_R$  liefert der Algorithmus von Yates nicht. Hierzu bestimmen wir am besten  $SS_T$ . Aus  $SS_T$  und den anderen Quadratsummen können wir dann problemlos  $SS_R$  bestimmen.

#### Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 139)

Es gilt

$$SS_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 (y_{ijkl} - \bar{y})^2 = 2440.938$$

Somit gilt

$$SS_R = SS_T - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC} = 765.5005$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist für die Quadratsumme jedes Faktors und jeder Faktorstufenkombination gleich 1 und für  $SS_T$  gleich  $n 2^k - 1$ . Also ist sie für  $SS_R$  gleich  $2^k(n - 1)$ . Wir sehen, dass wir für  $SS_R$  keine Freiheitsgrade haben, falls  $n$  gleich 1 ist. Wir werden weiter unten zeigen, wie wir die Signifikanz aller Effekte für  $n = 1$  grafisch überprüfen können.

Nun können wir die ANOVA-Tabelle aufstellen. Sie ist in Tabelle 3.19 zu finden.

Tabelle 3.19: Allgemeiner Aufbau einer ANOVA-Tabelle

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$               |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------------------|
| $A$                  | $SS_A$        | 1              | $MSS_A$                | $MSS_A/MSS_R$     |
| $B$                  | $SS_B$        | 1              | $MSS_B$                | $MSS_B/MSS_R$     |
| $C$                  | $SS_C$        | 1              | $MSS_C$                | $MSS_C/MSS_C$     |
| $AB$                 | $SS_{AB}$     | 1              | $MSS_{AB}$             | $MSS_{AB}/MSS_R$  |
| $AC$                 | $SS_{AC}$     | 1              | $MSS_{AC}$             | $MSS_{AC}/MSS_R$  |
| $BC$                 | $SS_{BC}$     | 1              | $MSS_{BC}$             | $MSS_{BC}/MSS_R$  |
| $ABC$                | $SS_{ABC}$    | 1              | $MSS_{ABC}$            | $MSS_{ABC}/MSS_R$ |
| Rest                 | $SS_R$        | $8n - 8$       | $MSS_R$                |                   |
| Gesamt               | $SS_T$        | $8n - 1$       |                        |                   |

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 139)**

Es gilt

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$   |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------|
| $A$                  | 715.5625      | 1              | 715.5625               | 7.478 |
| $B$                  | 588.0625      | 1              | 588.0625               | 6.146 |
| $C$                  | 1.5625        | 1              | 1.5625                 | 0.016 |
| $AB$                 | 333.0625      | 1              | 333.0625               | 3.481 |
| $AC$                 | 14.0625       | 1              | 14.0625                | 0.147 |
| $BC$                 | 22.5625       | 1              | 22.5625                | 0.236 |
| $ABC$                | 0.5625        | 1              | 0.5625                 | 0.006 |
| Rest                 | 765.5000      | 8              | 95.6900                |       |
| Gesamt               | 2440.9380     | 15             |                        |       |

Wir testen die Signifikanz jedes Faktors mit

$$F_F = \frac{MSS_F}{MSS_R}$$

Die Nullhypothese  $H_0$  ist, dass der Faktor keinen Effekt hat. Wenn  $H_0$  zutrifft, ist  $F_{Faktor}$  mit 1 und  $(n-1)2^k$  Freiheitsgraden  $F$ -verteilt. Wir lehnen  $H_0$  ab, wenn gilt  $F_{Faktor} \geq F_{1,(n-1)2^k;1-\alpha}$ .

Bei einem  $2^3$ -Plan testen wir zuerst die Signifikanz von  $E_{ABC}$ . Ist  $E_{ABC}$  signifikant, so ist es nicht sinnvoll, nach den Interaktionseffekten zwischen zwei Faktoren oder den Effekten der Faktoren zu fragen.

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 140)**

Wir testen

$$H_0 : E_{ABC} = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_{ABC} = 0.006$  lehnen wir  $H_0$  nicht ab.

Ist  $E_{ABC}$  nicht signifikant, so testen wir auf Signifikanz von  $E_{AB}$ ,  $E_{AC}$  und  $E_{BC}$ . Ist mindestens einer dieser drei Effekte signifikant, so ist es nicht sinnvoll, nach den Effekten der Faktoren zu fragen.

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 141)**

Wir testen

$$H_0 : E_{AB} = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_{AB} = 3.481$  lehnen wir  $H_0$  nicht ab.

Wir testen

$$H_0 : E_{AC} = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_{AC} = 0.147$  lehnen wir  $H_0$  nicht ab.

Wir testen

$$H_0 : E_{BC} = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_{BC} = 0.236$  lehnen wir  $H_0$  nicht ab.

Ist keiner der drei Interaktionseffekte zwischen zwei Faktoren signifikant, so testen wir auf Signifikanz von  $E_A$ ,  $E_B$  und  $E_C$ .

**Beispiel 13 (fortgesetzt von Seite 141)**

Wir testen

$$H_0 : E_A = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_A = 7.478$  lehnen wir  $H_0$  ab.

Wir testen

$$H_0 : E_B = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0,95} = 5.32$ . Wegen  $F_B = 6.146$  lehnen wir  $H_0$  ab.

Wir testen

$$H_0 : E_C = 0$$

Der kritische Wert ist  $F_{1,8;0.95} = 5.32$ . Wegen  $F_C = 0.016$  lehnen wir  $H_0$  nicht ab. Sowohl die Schriftgröße als auch das Vorhandensein von Musik haben einen signifikanten Einfluss auf die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben. Dabei werden bei großer Schrift im Mittel 13.375 Aufgaben mehr richtig gelöst als bei kleiner Schrift. Bei Musik werden im Mittel 12.125 Aufgaben mehr richtig gelöst als ohne Musik.

### 3.4.7 Der Fall $n = 1$

Wird bei einem  $2^k$ -Versuchsplan nur eine Beobachtung auf jeder Faktorstufenkombination gemacht, so gilt  $SS_R = 0$ . Somit können die klassischen  $F$ -Tests auf Signifikanz der Effekte nicht verwendet werden.

#### Beispiel 14

Wir wählen die zweite Spalte aus Tabelle 3.17 auf Seite 135 aus:

Tabelle 3.20: Daten eines  $2^3$ -Plans mit  $n = 1$

| $A$ | $B$ | $C$ | Anzahl |
|-----|-----|-----|--------|
| -   | -   | -   | 42     |
| +   | -   | -   | 53     |
| -   | +   | -   | 43     |
| +   | +   | -   | 87     |
| -   | -   | +   | 39     |
| +   | -   | +   | 51     |
| -   | +   | +   | 48     |
| +   | +   | +   | 73     |

Wir wenden den Algorithmus von Yates an.

|       |    |     |     |     |
|-------|----|-----|-----|-----|
| (1)   | 42 | 95  | 225 | 436 |
| $a$   | 53 | 130 | 211 | 92  |
| $b$   | 43 | 90  | 55  | 66  |
| $ab$  | 87 | 121 | 37  | 46  |
| $c$   | 39 | 11  | 35  | -14 |
| $ac$  | 51 | 44  | 31  | -18 |
| $bc$  | 48 | 12  | 33  | -4  |
| $abc$ | 73 | 25  | 13  | -20 |

Somit sind die geschätzten Effekte:

$$\begin{aligned} e_A &= 92/4 = 23 & e_B &= 66/4 = 16.5 \\ e_C &= -14/4 = -3.5 & e_{AB} &= 46/4 = 11.5 \\ e_{AC} &= -18/4 = -4.5 & e_{BC} &= -4/4 = -1 \\ e_{ABC} &= -20/4 = -5 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} SS_A &= 92^2/8 = 1058 \\ SS_B &= 66^2/8 = 544.5 \\ SS_C &= (-14)^2/8 = 24.5 \\ SS_{AB} &= 46^2/8 = 264.5 \\ SS_{AC} &= (-18)^2/8 = 40.5 \\ SS_{BC} &= (-4)^2/8 = 2 \\ SS_{ABC} &= (-20)^2/8 = 50 \end{aligned}$$

Es gibt aber drei Möglichkeiten, mit denen man überprüfen kann, ob Effekte signifikant sind.

1. Wir können annehmen, dass bestimmte Interaktionseffekte nicht im Modell auftreten. Somit können wir deren Quadratsummen als  $SS_R$  auffassen.

**Beispiel 14 (fortgesetzt von Seite 142)**

Wir unterstellen, dass  $E_{ABC}$  gleich 0 ist, und erhalten folgende ANOVA-Tabelle:

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$   |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------|
| $A$                  | 1058.0        | 1              | 1058.0                 | 21.16 |
| $B$                  | 544.5         | 1              | 544.5                  | 10.89 |
| $C$                  | 24.5          | 1              | 24.5                   | 0.49  |
| $AB$                 | 264.5         | 1              | 264.5                  | 5.29  |
| $AC$                 | 40.5          | 1              | 40.5                   | 0.81  |
| $BC$                 | 2.0           | 1              | 2.0                    | 0.04  |
| $Rest$               | 50.0          | 1              | 50.0                   |       |
| Gesamt               | 1984.0        | 7              |                        |       |



Es gilt  $F_{1,1;0.95} = 161.45$ . Somit ist kein Effekt signifikant von 0 verschieden.

Wir können aber auch unterstellen, dass alle Interaktionen gleich 0 sind. Dann erhalten wir folgende ANOVA-Tabelle.

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$    |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|--------|
| $A$                  | 1058.0        | 1              | 1058.00                | 11.854 |
| $B$                  | 544.5         | 1              | 544.50                 | 6.101  |
| $C$                  | 24.5          | 1              | 24.50                  | 0.275  |
| $Rest$               | 357.0         | 4              | 89.25                  |        |
| Gesamt               | 1984.0        | 7              |                        |        |

Es gilt  $F_{1,4;0.95} = 7.71$ . Somit ist nur der Effekt von  $A$  signifikant von 0 verschieden.

- Wir können die Signifikanz grafisch überprüfen. Dazu bestimmt man die geordneten Effekte  $e_{(1)}, \dots, e_{(2^k-1)}$ . Ist die Normalverteilungsannahme erfüllt, und ist kein Effekt signifikant, so sind alle Effekte Realisationen von identisch normalverteilten Zufallsvariablen. Wir vergleichen die geordneten Effekte mit den zugehörigen Quantilen der Standardnormalverteilung. Man ordnet  $e_{(i)}$  das  $(i - 0.5)/(2^k - 1)$ -Quantil der Standardnormalverteilung zu. Man zeichnet also  $\Phi^{-1}((i - 0.5)/(2^k - 1))$  gegen  $e_{(i)}$ . Wenn alle Effekte nicht signifikant sind, so sollten die Punkte um eine Gerade streuen. Weichen Effekte stark von der Geraden ab, so spricht dies dafür, dass diese Effekte signifikant von 0 verschieden sind.

**Beispiel 14 (fortgesetzt von Seite 143)**

In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $\Phi^{-1}((i - 0.5)/7)$  zu finden.

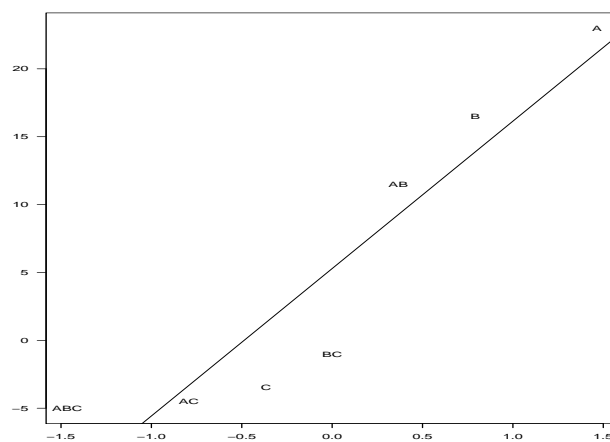
| $i$                                     | 1     | 2     | 3     | 4 | 5    | 6    | 7    |
|---|-------|-------|-------|---|------|------|------|
| $\Phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)$ | -1.47 | -0.79 | -0.37 | 0 | 0.37 | 0.79 | 1.47 |

Die folgende Tabelle zeigt die geordneten geschätzten Effekte.

| Effekt | ABC | AC   | C    | BC | AB   | B    | A  |
|--------|-----|------|------|----|------|------|----|
| Wert   | -5  | -4.5 | -3.5 | -1 | 11.5 | 16.5 | 23 |

Abbildung 3.8 zeigt den Normal-Probability-Plot der Effekte.

Abbildung 3.8: Normal-Probability-Plot der Effekte



Die Punkte streuen um die Gerade. Dies spricht dafür, dass kein Effekt signifikant von 0 verschieden ist.

### Beispiel 15

Jing Zeng und Lars Hartwig untersuchen in ihrer Projektarbeit, welche Faktoren einen Einfluss auf die Zeit haben, die man benötigt, um ein Puzzle zu vollenden.

Sie betrachten folgende Faktoren

- A: Geschlecht mit den Faktorstufen *männlich* (-) und *weiblich* (+)
- B: Nationalität mit den Faktorstufen *deutsch* (-) und *chinesisch* (+)
- C: Vorlage mit den Faktorstufen *kurzfristig* (-) und *permanent* (+)

Gemessen wurde die Zeit in Sekunden. Auf jeder Faktorstufenkombination wurde eine Beobachtung gemacht. Die Daten sind in Tabelle 3.21 zu finden.

Tabelle 3.21: Daten eines  $2^3$ -Plans mit  $n = 1$ 

| $A$ | $B$ | $C$ | Anzahl |
|-----|-----|-----|--------|
| -   | -   | -   | 535    |
| +   | -   | -   | 360    |
| -   | +   | -   | 758    |
| +   | +   | -   | 1497   |
| -   | -   | +   | 592    |
| +   | -   | +   | 316    |
| -   | +   | +   | 1163   |
| +   | +   | +   | 1646   |

Wir wenden den Algorithmus von Yates an.

|       |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|
| (1)   | 535  | 895  | 3150 | 6867 |
| $a$   | 360  | 2255 | 3717 | 771  |
| $b$   | 758  | 908  | 564  | 3261 |
| $ab$  | 1497 | 2809 | 207  | 1673 |
| $c$   | 592  | -175 | 1360 | 567  |
| $ac$  | 316  | 739  | 1901 | -357 |
| $bc$  | 1163 | -276 | 914  | 541  |
| $abc$ | 1646 | 483  | 759  | -155 |

Somit sind die geschätzten Effekte:

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{771}{4} = 192.75 \\ e_B &= \frac{3261}{4} = 815.25 \\ e_C &= \frac{567}{4} = 141.75 \\ e_{AB} &= \frac{1673}{4} = 418.25 \\ e_{AC} &= \frac{-357}{4} = -89.25 \\ e_{BC} &= \frac{541}{4} = 135.25 \\ e_{ABC} &= \frac{-155}{4} = -38.75 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} SS_A &= \frac{771^2}{8} = 74305.13 \\ SS_B &= \frac{3261^2}{8} = 1329265 \\ SS_C &= \frac{567^2}{8} = 40186.13 \\ SS_{AB} &= \frac{1673^2}{8} = 349866.1 \\ SS_{AC} &= \frac{(-357)^2}{8} = 15931.13 \\ SS_{BC} &= \frac{541^2}{8} = 36585.13 \\ SS_{ABC} &= \frac{(-155)^2}{8} = 3003.125 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass bestimmte Interaktionseffekte nicht im Modell auftreten, erhalten wir folgende Ergebnisse:

**Beispiel 15 (fortgesetzt)**

Wir unterstellen, dass  $E_{ABC}$  gleich 0 ist, und erhalten folgende ANOVA-Tabelle:

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$    |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|--------|
| $A$                  | 74305.1       | 1              | 74305.1                | 24.74  |
| $B$                  | 1329265.0     | 1              | 1329265.0              | 442.63 |
| $C$                  | 40186.1       | 1              | 40186.1                | 13.38  |
| $AB$                 | 349866.1      | 1              | 349866.1               | 116.50 |
| $AC$                 | 15931.1       | 1              | 15931.1                | 5.30   |
| $BC$                 | 36585.1       | 1              | 36585.1                | 12.18  |
| $Rest$               | 3003.1        | 1              | 3003.1                 |        |
| Gesamt               | 1849142.0     | 7              |                        |        |

Es gilt  $F_{1,1;0.95} = 161.45$ . Somit ist der Effekt von  $B$  signifikant von 0 verschieden.

Wir können aber auch unterstellen, dass alle Interaktionseffekte gleich 0 sind. dann erhalten wir folgende ANOVA-Tabelle.

| Quelle der Variation | Quadratsummen | Freiheitsgrade | Mittlere Quadratsummen | $F$   |
|----------------------|---------------|----------------|------------------------|-------|
| $A$                  | 74305.1       | 1              | 74305.1                | 0.73  |
| $B$                  | 1329265.0     | 1              | 1329265.0              | 13.12 |
| $C$                  | 40186.1       | 1              | 40186.1                | 0.40  |
| $Rest$               | 405386        | 4              | 101346                 |       |
| Gesamt               | 1849142.0     | 7              |                        |       |

Es gilt  $F_{1,4;0.95} = 7.71$ . Somit ist nur der Effekt von  $B$  signifikant von 0 verschieden.

Wir sehen, dass beide Vorgehensweisen das gleiche Ergebnis liefern. Dies muss aber nicht so sein.

- Lenth (1989) hat ein Verfahren vorgeschlagen, das es erlaubt, auf Signifikanz der Effekte zu testen, wenn  $n$  gleich 1 ist. Schauen wir uns dieses an.

Bei einem  $2^k$ -Plan werden  $m = 2^k - 1$  Effekte  $E_1, \dots, E_m$  durch  $e_1, \dots, e_m$  geschätzt. Um zu überprüfen, welche der Effekte signifikant sind, sollte man nach Lenth folgendermaßen vorgehen.

(a) Bestimme den Median  $M_1$  der Absolutbeträge  $|e_1|, \dots, |e_m|$  der geschätzten Effekte  $e_1, \dots, e_m$ .

(b) Berechne

$$s_0 = 1.5 \cdot M_1 \quad (3.58)$$

(c) Bestimme den Median  $M_2$  der  $|e_i|$ , die kleiner als  $2.5 \cdot s_0$  sind.

(d) Berechne

$$PSE = 1.5 \cdot M_2 \quad (3.59)$$

(e) Bilde

$$ME = t_1 \cdot PSE \quad (3.60)$$

Die Werte von  $t_1$  in Abhängigkeit von  $k$  in Tabelle 3.22 zu finden.

(f) Bilde

$$SME = t_2 \cdot PSE \quad (3.61)$$

Die Werte von  $t_2$  in Abhängigkeit von  $k$  in Tabelle 3.22 zu finden.

Tabelle 3.22: Werte von  $t_1$  und  $t_2$  in Abhängigkeit von  $k$

| $k$ | $t_1$ | $t_2$ |
|-----|-------|-------|
| 3   | 2.295 | 4.891 |
| 4   | 2.140 | 4.163 |
| 5   | 2.082 | 4.030 |

Quelle: Montgomery (2012)

Bei der Überprüfung auf Signifikanz gibt es zwei Möglichkeiten.:

- (a) Will man überprüfen, ob ein spezieller Effekt  $E_i$  signifikant von 0 verschieden ist, so verwendet man  $ME$ . Wir lehnen die Hypothese

$$H_0 : E_i = 0$$

ab, wenn gilt

$$|e_i| > ME$$

- (b) Will man überprüfen, ob **mindestens** ein Effekt von 0 verschieden ist, verwenden wir  $SME$ . Alle Effekte werden als signifikant angesehen, bei denen der Absolutbetrag des geschätzten Effektes größer als  $SME$  ist.

### Beispiel 15 (fortgesetzt)

Die sortierten Absolutbeträge der Effekte sind

| $e_{ABC}$ | $e_{AC}$ | $e_{BC}$ | $e_C$  | $e_A$  | $e_{AB}$ | $e_B$  |
|-----------|----------|----------|--------|--------|----------|--------|
| 38.75     | 89.25    | 135.25   | 141.75 | 192.75 | 418.25   | 815.25 |

Somit gilt  $M_1 = 141.75$ .

Es gilt

$$s_0 = 1.5 \cdot M_1 = 1.5 \cdot 141.75 = 212.625$$

Die sechs kleinsten  $|e_i|$  sind kleiner als  $2.5 \cdot 212.625 = 531.5625$ . Ihr Median ist 138.5. Also gilt  $M_2 = 138.5$ .

Es gilt

$$PSE = 1.5 \cdot M_2 = 1.5 \cdot 138.5 = 207.75$$

Bilde

$$ME = t_1 \cdot PSE = 2.295 \cdot 207.75 = 476.79$$

Da  $|e_B| = 815.25 > 476.79$  gilt, entscheiden wir uns dafür, dass der Effekt von  $B$  signifikant ist.

Hätten wir den auf  $SME$  beruhenden Test angewendet, so gilt

$$SME = t_2 \cdot PSE = 4.891 \cdot 207.75 = 1016.1$$

In diesem Fall wäre kein Effekt signifikant.

**Beispiel 16**

Markus Hüls und Verena Kleine untersuchen in ihrer Projektarbeit mit dem d2-Test, welche Faktoren einen Einfluss auf die Konzentrationsfähigkeit haben. Beim d2-Test liegt den Teilnehmern ein Testbogen vor, der aus 14 Zeilen mit jeweils 47 Zeichen besteht. In einer Zeile steht eine Folge, die aus den Buchstaben **d** und **p**, über oder unten denen bis zu vier Striche sind. Es müssen alle **d** mit zwei Strichen durchgestrichen werden.

Sie betrachten folgende Faktoren

A : Musik mit den Faktorstufen *ohne* (-) und *mit* (+)

B : Geschlecht mit den Faktorstufen *männlich* (-) und *weiblich* (+)

C : Papierfarbe mit den Faktorstufen *weiß* (-) und *gelb* (+).

Auf jeder Faktorstufenkombination wurde eine Beobachtung gemacht. Die Daten sind in Tabelle 3.23 zu finden.

Tabelle 3.23: Daten eines  $2^3$ -Plans mit  $n = 1$

| A | B | C | Anzahl |
|---|---|---|--------|
| - | - | - | 369    |
| + | - | - | 407    |
| - | + | - | 443    |
| + | + | - | 463    |
| - | - | + | 359    |
| + | - | + | 484    |
| - | + | + | 397    |
| + | + | + | 515    |

Wir wenden den Algorithmus von Yates an.

|            |     |     |      |      |
|------------|-----|-----|------|------|
| (1)        | 369 | 776 | 1682 | 3437 |
| <i>a</i>   | 407 | 906 | 1755 | 301  |
| <i>b</i>   | 443 | 843 | 58   | 199  |
| <i>ab</i>  | 463 | 912 | 243  | -25  |
| <i>c</i>   | 359 | 38  | 130  | 73   |
| <i>ac</i>  | 484 | 20  | 69   | 185  |
| <i>bc</i>  | 397 | 125 | -18  | -61  |
| <i>abc</i> | 515 | 118 | -7   | 11   |



Somit sind die geschätzten Effekte:

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{301}{4} = 75.25 \\ e_B &= \frac{199}{4} = 49.75 \\ e_C &= \frac{73}{4} = 18.25 \\ e_{AB} &= \frac{-25}{4} = -6.25 \\ e_{AC} &= \frac{185}{4} = 46.25 \\ e_{BC} &= \frac{-61}{4} = -15.25 \\ e_{ABC} &= \frac{11}{4} = 2.75 \end{aligned}$$

Die sortierten Absolutbeträge der Effekte sind

| $e_{ABC}$ | $e_{AB}$ | $e_{BC}$ | $e_C$ | $e_{AC}$ | $e_B$ | $e_A$ |
|-----------|----------|----------|-------|----------|-------|-------|
| 2.75      | 6.25     | 15.25    | 18.25 | 46.25    | 49.75 | 75.25 |

Somit gilt  $M_1 = 18.25$ .

Es gilt

$$s_0 = 1.5 \cdot M_1 = 1.5 \cdot 18.25 = 27.375$$

Die sechs kleinsten  $|e_i|$  sind kleiner als  $2.5 \cdot 27.375 = 68.4375$ . Ihr Median ist 16.75. Also gilt  $M_2 = 16.75$ .

Es gilt

$$PSE = 1.5 \cdot M_2 = 1.5 \cdot 16.75 = 25.125$$

Bilde

$$ME = t_1 \cdot PSE = 2.295 \cdot 25.125 = 57.66$$

Da  $|e_A| = 75.25 > 57.66$  gilt, entscheiden wir uns dafür, dass der Effekt von  $A$  signifikant ist.

Hätten wir den auf  $SME$  beruhenden Test angewendet, so gilt

$$SME = t_2 \cdot PSE = 4.891 \cdot 25.125 = 122.89$$

In diesem Fall wäre kein Effekt signifikant.

### 3.4.8 $2^k$ -Pläne in R

Eigentlich wissen wir bereits alles Notwendige. Schauen wir uns trotzdem die Beispiele dieses Kapitels in R an. Beginnen wir mit dem Beispiel 13 auf Seite 135. Wir weisen die Werte aus Tabelle 3.17 auf Seite 135 der Variablen `Anzahl2` zu, wobei wir mit der ersten Spalte beginnen.

```
> Anzahl2<-c(47,49,48,52,51,43,52,69)
> Anzahl2<-c(Anzahl2,42,53,43,87,39,51,48,73)
> Anzahl2
[1] 47 49 48 52 51 43 52 69 42 53 43 87 39 51 48 73
```

Nun benötigen wir die drei Faktoren. Wir geben jedem Faktor einen Namen.

```
> Schrift<-factor(rep(rep(c(-1,1),4),2))
> Schrift
[1] -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1
Levels: -1 1
> Musik<-factor(rep(rep(c(-1,1),c(2,2)),4))
> Musik
[1] -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1
Levels: -1 1
> Trinken<-factor(rep(rep(c(-1,1),c(4,4)),2))
> Trinken
[1] -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1
Levels: -1 1
```

Schauen wir uns das Modell mit allen Interaktionen an. Wir erhalten die ANOVA-Tabelle durch

```
> summary(aov(Anzahl2~Schrift*Musik*Trinken))
```

|                       | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F)  |   |
|-----------------------|----|--------|---------|---------|---------|---|
| Schrift               | 1  | 715.56 | 715.56  | 7.4781  | 0.02566 | * |
| Musik                 | 1  | 588.06 | 588.06  | 6.1457  | 0.03817 | * |
| Trinken               | 1  | 1.56   | 1.56    | 0.0163  | 0.90147 |   |
| Schrift:Musik         | 1  | 333.06 | 333.06  | 3.4807  | 0.09906 | . |
| Schrift:Trinken       | 1  | 14.06  | 14.06   | 0.1470  | 0.71144 |   |
| Musik:Trinken         | 1  | 22.56  | 22.56   | 0.2358  | 0.64028 |   |
| Schrift:Musik:Trinken | 1  | 0.56   | 0.56    | 0.0059  | 0.94077 |   |
| Residuals             | 8  | 765.50 | 95.69   |         |         |   |

```
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Wir sehen, dass die Quadratsummen auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet werden.

Schauen wir uns den Algorithmus von Yates an. Wir machen aus dem Vektor `Anzahl2` eine Matrix mit zwei Spalten, die wie die Spalten in Tabelle 3.17 auf Seite 135 angeordnet sind.

```
> h<-matrix(Anzahl2,8,2)
> h
      [,1] [,2]
[1,]  47  42
[2,]  49  53
[3,]  48  43
[4,]  52  87
[5,]  51  39
[6,]  43  51
[7,]  52  48
[8,]  69  73
```

Für den Algorithmus benötigen wir nur die Summen der Zeilen. Also berechnen wir sie:

```
> v<-apply(h,1,sum)
> v
[1]  89 102  91 139  90  94 100 142
```

Beim Algorithmus von Yates werden die Summen bzw. Differenzen benachbarter Elemente eines Vektors bestimmt. Wir erzeugen eine zweispaltige Matrix, in der benachbarte Elemente nebeneinanderstehen.

```
> m<-matrix(v,4,2,byrow=T)
> m
      [,1] [,2]
[1,]  89 102
[2,]  91 139
[3,]  90  94
[4,] 100 142
```

Mit dieser Matrix erhält man den neuen Vektor problemlos. Man muss zuerst die beiden Spalten addieren und anschließend die erste Spalte von der zweiten subtrahieren.

```
> v<-c(m[,1]+m[,2],m[,2]-m[,1])
> v
[1] 191 230 184 242  13  48  4  42
```

Jetzt müssen wir die beiden letzten Schritte nur noch zweimal durchführen und sind fertig.

```
> m<-matrix(v,4,2,byrow=T)
> v<-c(m[,1]+m[,2],m[,2]-m[,1])
> v
[1] 421 426 61 46 39 58 35 38
> m<-matrix(v,4,2,byrow=T)
> v<-c(m[,1]+m[,2],m[,2]-m[,1])
> v
[1] 847 107 97 73 5 -15 19 3
```

Die folgende Funktion `Yates` liefert die Kontraste bei einem  $2^k$ -Plan. Benötigt wird nur der Vektor mit den Summen auf den einzelnen Faktorstufenkombinationen.

```
yates<-function(v)
{# Algorithmus von Yates fuer den Vektor v
n<-length(v)
k<-log(n,base=2)
for(i in 1:k)
{m<-matrix(v,n/2,2,byrow=T)
v<-c(m[,1]+m[,2],m[,2]-m[,1])
}
return(v)}
```

Wir wenden die Funktion an.

```
> yates(apply(h,1,sum))
[1] 847 107 97 73 5 -15 19 3
```

Schauen wir uns den Fall  $n = 1$  an. Wir betrachten das Beispiel 14 auf Seite 142. Wir weisen die Werte der Variablen `Anzahl1` zu:

```
> Anzahl1<-c(42,53,43,87,39,51,48,73)
> Anzahl1
[1] 42 53 43 87 39 51 48 73
```

Wir erzeugen Variablen `A`, `B` und `C` für die Faktoren.

```
> A<-factor(rep(c(-1,1),4))
> B<-factor(rep(rep(c(-1,1),c(2,2)),2))
> C<-factor(rep(c(-1,1),c(4,4)))
```

Wir erstellen die ANOVA-Tabelle mit allen Effekten:

```
> summary(aov(Anzahl1~A*B*C))
```

|       | Df | Sum Sq | Mean Sq |
|-------|----|--------|---------|
| A     | 1  | 1058.0 | 1058.0  |
| B     | 1  | 544.5  | 544.5   |
| C     | 1  | 24.5   | 24.5    |
| A:B   | 1  | 264.5  | 264.5   |
| A:C   | 1  | 40.5   | 40.5    |
| B:C   | 1  | 2.0    | 2.0     |
| A:B:C | 1  | 50.0   | 50.0    |

Wir sehen, dass keine Tests möglich sind.

Nun das Modell, in dem  $SS_{ABC}$  gleich  $SS_R$  ist:

```
> summary(aov(Anzahl1~A+B+C+A*B+A*C+B*C))
```

|           | Df | Sum Sq | Mean Sq | F value | Pr(>F) |
|-----------|----|--------|---------|---------|--------|
| A         | 1  | 1058.0 | 1058.0  | 21.16   | 0.1363 |
| B         | 1  | 544.5  | 544.5   | 10.89   | 0.1873 |
| C         | 1  | 24.5   | 24.5    | 0.49    | 0.6112 |
| A:B       | 1  | 264.5  | 264.5   | 5.29    | 0.2611 |
| A:C       | 1  | 40.5   | 40.5    | 0.81    | 0.5335 |
| B:C       | 1  | 2.0    | 2.0     | 0.04    | 0.8743 |
| Residuals | 1  | 50.0   | 50.0    |         |        |

Und nun das Modell, das nur die Haupteffekte enthält:

```
> summary(aov(Anzahl1~A+B+C))
```

|           | Df | Sum Sq  | Mean Sq | F value | Pr(>F)    |
|-----------|----|---------|---------|---------|-----------|
| A         | 1  | 1058.00 | 1058.00 | 11.8543 | 0.02622 * |
| B         | 1  | 544.50  | 544.50  | 6.1008  | 0.06895 . |
| C         | 1  | 24.50   | 24.50   | 0.2745  | 0.62801   |
| Residuals | 4  | 357.00  | 89.25   |         |           |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Um den Normal-Probability-Plot der Effekte erstellen zu können, benötigen wir die Effekte. Diese bekommen wir mit dem Algorithmus von Yates. Wir rufen also die Funktion `yates` auf:

```
> k<-yates(Anzahl1)
> k
[1] 436 92 66 46 -14 -18 -4 -20
```

Die Schätzer der Effekte erhalten wir durch:

```
> e<-k[2:8]/4
> e
[1] 23.0 16.5 11.5 -3.5 -4.5 -1.0 -5.0
```

Wir geben einen Vektor mit den Namen der Effekte ein

```
> eff.n<-c("A", "B", "AB", "C", "AC", "BC", "ABC")
> eff.n
[1] "A"   "B"   "AB"  "C"   "AC"  "BC"  "ABC"
```

Den Normal-Probability-Plot der effekte erhalten wir dann durch folgende Befehlsfolge

```
> e.s<-e[order(e)]
> e.n<-eff.n[order(e)]
> plot(qnorm(((1:7)-0.5)/7),e.s,type="n",xlab="",ylab="")
> text(qnorm(((1:7)-0.5)/7),e.s,e.n)
> abline(lsfite(qnorm(((1:7)-0.5)/7),e.s))
```

Schauen wir uns nun noch ein Beispiel für  $n = 1$  an.

Es soll untersucht werden, von welchen Faktoren das Erinnerungsvermögen abhängt. Hierzu wurde Personen eine Liste mit 20 dreisilbigen Wörtern vorgelegt oder vorgelesen. Danach hatten die Personen drei Minuten Zeit, alle Wörter aufzuschreiben, die sie sich gemerkt hatten. Es werden die folgenden drei Faktoren betrachtet:

- A: Geschlecht mit den Faktorstufen männlich (-) und weiblich (+)
- B: Alter mit den Faktorstufen jung (-) und alt (+)
- C: Darbietung mit den Faktorstufen akustisch (-) und gedruckt (+)

Auf jeder Faktorstufenkombination wurde ein Versuch durchgeführt und die Anzahl der Wörter bestimmt, die aufgeschrieben wurden.

Hier sind die Daten

| A | B | C | Anzahl |
|---|---|---|--------|
| - | - | - | 9      |
| + | - | - | 9      |
| - | + | - | 5      |
| + | + | - | 7      |
| - | - | + | 10     |
| + | - | + | 14     |
| - | + | + | 12     |
| + | + | + | 10     |

Wir geben die Daten in R ein.

```
> Anzahl<-c(9,9,5,7,10,14,12,10)
```

Zum Erzeugen der Faktoren können wir alternativ zum bisherigen Vorgehen auch die Funktion `gen.factorial` im Paket `AlgDesign` verwenden. Dieses Paket muss man zunächst installieren. Hierzu klickt man auf den Schalter

`Packages`

und danach auf

```
Install package(s) from CRAN
```

Es öffnet sich ein Fenster mit einer Liste, in der man auf `AlgDesign` klickt. Dann wird das Paket installiert. Dazu muss natürlich eine Verbindung zum Internet vorhanden sein. Nachdem man

```
> library(AlgDesign)
```

einggegeben hat, kann man die Funktion `gen.factorial` verwenden.

Diese hat vier Argumente. Das erste Argument `levels` ist die Anzahl der Faktorstufen der Faktoren und das zweite Argument `nVars` die Anzahl der Faktoren. Das Argument `factors` setzt man auf den Wert `all` mit dem Argument `varNames` kann man den Faktoren Namen geben.

```
> m <- gen.factorial(2,3,factors="all",
                    varName=c("Geschlecht","Alter","Darbietung"))
```

```
> m
  Geschlecht Alter Darbietung
1           1     1           1
2           2     1           1
3           1     2           1
4           2     2           1
5           1     1           2
6           2     1           2
7           1     2           2
8           2     2           2
```

Wir können wie bei einem Versuchsplan mit zwei Faktoren die Funktion `aov` verwenden. Beginnen wir mit dem additiven Modell

```
> attach(m)
```

```
> e<-aov(Anzahl~Geschlecht+Alter+Darbietung)
```

```
> summary(e)
              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Geschlecht   1     2      2    0.6667 0.46005
Alter        1     8      8    2.6667 0.17781
Darbietung   1    32     32   10.6667 0.03091 *
Residuals    4    12      3
```

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Wir sehen, dass der Faktor Darbietung signifikant ist.

Unterstellen wir, dass nur der Interaktionsterm zwischen allen drei Faktoren gleich 0 ist, so geben wir ein

```
> e<-aov(Anzahl~Geschlecht*Alter*Darbietung-Geschlecht:Alter:Darbietung)
> summary(e)
```

|                       | Df | Sum Sq    | Mean Sq   | F value   | Pr(>F) |
|-----------------------|----|-----------|-----------|-----------|--------|
| Geschlecht            | 1  | 2         | 2         | 0.25      | 0.7048 |
| Alter                 | 1  | 8         | 8         | 1.00      | 0.5000 |
| Darbietung            | 1  | 32        | 32        | 4.00      | 0.2952 |
| Geschlecht:Alter      | 1  | 2         | 2         | 0.25      | 0.7048 |
| Geschlecht:Darbietung | 1  | 3.058e-32 | 3.058e-32 | 3.823e-33 | 1.0000 |
| Alter:Darbietung      | 1  | 2         | 2         | 0.25      | 0.7048 |
| Residuals             | 1  | 8         | 8         |           |        |

Im vollständigen Modell können wir nicht testen. Wir erhalten die Quadratsummen durch

```
> e<-aov(Anzahl~Geschlecht*Alter*Darbietung)
> summary(e)
```

|                             | Df | Sum Sq    | Mean Sq   |
|-----------------------------|----|-----------|-----------|
| Geschlecht                  | 1  | 2         | 2         |
| Alter                       | 1  | 8         | 8         |
| Darbietung                  | 1  | 32        | 32        |
| Geschlecht:Alter            | 1  | 2         | 2         |
| Geschlecht:Darbietung       | 1  | 3.058e-32 | 3.058e-32 |
| Alter:Darbietung            | 1  | 2         | 2         |
| Geschlecht:Alter:Darbietung | 1  | 8         | 8         |

Um die geschätzten Effekte und die Quadratsummen zu erhalten geben wir ein



```
> e<-yates(Anzahl,alles=FALSE)[-1]
> e
[1] 4 -8 -4 16 0 4 -8
```

Nun schauen wir uns das Verfahren von Lenth an. Die folgende Funktion ist nur für einen faktoriellen Versuchsplan mit drei Faktoren gedacht. Sie führt das Verfahren auf Basis des ME durch. Alle Faktoren, deren geschätzte Effekte betragsmäßig größer als ME sind, werden als signifikant angesehen.

```
lenth<-function(e)
{ # das Verfahren von LENTH bei 3 Faktoren mit dem ME
  # e ist der Vektor mit den Effekten
  eff<-c("A","B","AB","C","AC","BC","ABC")
  ea<-abs(e)
  o<-order(ea)
  cat("Die sortierten Effekte\n")
  for (i in 1:7) cat(paste(eff[o][i],ea[o][i],"\n"))
  m1<-median(ea)
  cat(paste("\nM1 =",m1,"\n"))
  s0<-1.5*m1
  cat(paste("s0 =",s0,"\n"))
  m2<-median(ea[ea<2.5*s0])
  cat(paste("M2 =",m2,"\n"))
  PSE<-1.5*m2
  cat(paste("PSE =",PSE,"\n"))
  me<-2.295*PSE
  cat(paste("ME =",me,"\n\n"))
  cat("Signifikante Faktoren:\n")
  cat(eff[ea>me],"\n")
}
```

Wir bestimmen die geschätzten Effekte und rufen die Funktion `lenth` auf:

```
> lenth(yates(Anzahl,alles=FALSE)[-1]/4)
Die sortierten Effekte
AC 0
A 1
AB 1
BC 1
B 2
ABC 2
C 4
```

$$M1 = 1$$

$$s0 = 1.5$$

$$M2 = 1$$

$$PSE = 1.5$$

$$ME = 3.4425$$

Signifikante Faktoren:

C

### 3.5 Fraktionelle faktorielle Versuchspläne

Bei einem  $2^k$ -Plan steigt mit wachsendem  $k$  die Anzahl der Versuche exponentiell an. So muss man bei 6 Faktoren schon  $2^6 = 64$  und bei 10 Faktoren schon  $2^{10} = 1024$  Versuche durchführen. Ein fraktioneller Versuchsplan bietet nun die Möglichkeit, mit einer geringen Anzahl von Versuchen die Haupteffekte und Interaktionseffekte zu schätzen. Hierzu muss man aber einige Annahmen machen. Wir wollen an kleinen Beispielen die Grundidee fraktioneller faktorieller Versuchspläne vermitteln.

Wir beginnen mit einem  $2^3$ -Plan. Tabelle 3.24 enthält alle Faktoren und Interaktionen zwischen Faktoren.

Tabelle 3.24: Alle Effekte eines  $2^3$ -Plans

|            | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>AB</i> | <i>AC</i> | <i>BC</i> | <i>ABC</i> |
|------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| (1)        | -        | -        | -        | +         | +         | +         | -          |
| <i>a</i>   | +        | -        | -        | -         | -         | +         | +          |
| <i>b</i>   | -        | +        | -        | -         | +         | -         | +          |
| <i>ab</i>  | +        | +        | -        | +         | -         | -         | -          |
| <i>c</i>   | -        | -        | +        | +         | -         | -         | +          |
| <i>ac</i>  | +        | -        | +        | -         | +         | -         | -          |
| <i>bc</i>  | -        | +        | +        | -         | -         | +         | -          |
| <i>abc</i> | +        | +        | +        | +         | +         | +         | +          |

Wir wollen nur die Hälfte der Versuche durchführen und wählen die Versuche aus, bei denen *ABC* auf + steht. Es bleiben 4 Versuche übrig, die in Tabelle 3.25 zu finden sind.

Tabelle 3.25: Teilplan eines  $2^3$ -Plans

|            | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>AB</i> | <i>AC</i> | <i>BC</i> | <i>ABC</i> |
|------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| <i>a</i>   | +        | -        | -        | -         | -         | +         | +          |
| <i>b</i>   | -        | +        | -        | -         | +         | -         | +          |
| <i>c</i>   | -        | -        | +        | +         | -         | -         | +          |
| <i>abc</i> | +        | +        | +        | +         | +         | +         | +          |

Schauen wir uns die Spalten dieser Tabelle genauer an. In 6 Spalten stehen

zwei + und zwei -. Wir können also die Effekte der entsprechenden Faktoren bzw. Interaktionen schätzen. So ist der Schätzer  $e_A$  des Effekts von  $A$  gleich

$$e_A = \frac{1}{2}(a + abc - b - c)$$

Entsprechend erhalten wir Schätzer für  $E_B$

$$e_B = \frac{1}{2}(b + abc - a - c)$$

und  $E_C$

$$e_C = \frac{1}{2}(c + abc - a - b).$$

Wenn wir die Tabelle genauer anschauen, stellen wir fest, dass jeweils zwei der ersten 6 Spalten identisch sind. So sind die Spalten  $A$  und  $BC$  identisch. Mit dem Effekt von  $A$  schätzen wir also gleichzeitig auch den Effekt von  $BC$ . Wir sagen auch, dass die beiden Effekte **vermischt** sind. Wir sehen, dass auch die Effekte  $B$  und  $AC$  und die Effekte  $C$  und  $AB$  vermischt sind. Wenn wir annehmen, dass alle Interaktionen zwischen zwei Faktoren vernachlässigt werden können, können wir alle drei Haupteffekte schätzen.

### Beispiel 17

Wir betrachten die Daten aus Beispiel 14 auf Seite 142. Wir führen nur die Versuche durch, bei denen  $ABC$  auf + steht. Die Versuche sind in Tabelle 3.26 zu finden.

Tabelle 3.26: Teilplan eines  $2^3$ -Plans

|       | $A$ | $B$ | $C$ | $ABC$ | Anzahl |
|-------|-----|-----|-----|-------|--------|
| $a$   | +   | -   | -   | +     | 53     |
| $b$   | -   | +   | -   | +     | 43     |
| $c$   | -   | -   | +   | +     | 39     |
| $abc$ | +   | +   | +   | +     | 73     |

Es gilt

$$e_A = 0.5(53 + 73 - 43 - 39) = 22$$

$$e_B = 0.5(43 + 73 - 53 - 39) = 12$$

$$e_C = 0.5(39 + 73 - 43 - 53) = 8$$

Man spricht von einem fraktionellen faktoriellen Versuchsplan und bezeichnet diesen als  $2^{3-1}$ -Plan. Wir werden im Folgenden nur  $2^{k-1}$ -Pläne betrachten. Diese werden aus einem  $2^k$ -Plan dadurch gewonnen, dass man bei diesem die Hälfte der Versuche nicht durchführt. Im Prinzip muss man dabei nur so wie wir beim  $2^{3-1}$ -Plan vorgehen. Dabei verliert man aber leicht die Übersicht. Deshalb benötigt man eine Sprache, mit der man Teilpläne leicht beschreiben kann. Schauen wir uns diese an.

Wir betrachten die Spalten, die unter den Faktoren stehen, und fassen diese als Vektoren auf, bei denen an der Stelle + eine 1 und an der Stelle - eine -1 steht.

Wir definieren die Multiplikation der Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

durch

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ \vdots \\ a_N \cdot b_n \end{pmatrix}$$

In Tabelle 3.24 auf Seite 162 gilt  $A \cdot B = AB$ ,  $A \cdot C = AC$  und  $B \cdot C = BC$ . Wir können bei der Multiplikation also das Zeichen  $\cdot$  weglassen und schreiben  $AB$  für  $A \cdot B$ .

Wir setzen

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$AA = I$$

und

$$AI = IA = A.$$

Um einen fraktionellen faktoriellen  $2^{k-1}$ -Plan aus einem  $2^k$ -Plan zu gewinnen, benötigen wir einen Faktor oder eine Interaktion des  $2^k$ -Plans, den wir Generator  $G$  nennen. Wir wählen aus dem  $2^k$ -Plan alle Versuche aus, bei denen der Generator entweder auf + oder auf - steht.

**Beispiel 18**

Wir betrachten eine  $2^3$ -Plan, aus dem wir einen  $2^{3-1}$ -Plan gewinnen wollen. Wir wählen  $ABC$  als Generator  $G$ .

Da alle Komponenten des Generators entweder auf - oder + stehen, gilt entweder  $I = G$  oder  $I = -G$ .

**Beispiel 18 (fortgesetzt)**

Es gilt  $I = ABC$ .

Nun können wir durch einfache Algebra feststellen, welche Faktoren und Interaktionen miteinander vermischt sind. Schauen wir uns dies für das Beispiel an.

**Beispiel 18 (fortgesetzt)**

Multiplizieren wir  $I = ABC$  mit  $A$ , so erhalten wir  $A = BC$ .

Multiplizieren wir  $I = ABC$  mit  $B$ , so erhalten wir  $B = AC$ .

Multiplizieren wir  $I = ABC$  mit  $C$ , so erhalten wir  $C = AB$ .

Wählen wir hingegen als Generator  $I = AB$ , so gilt  $A = B$ ,  $C = ABC$  und  $AC = BC$ . Die Haupteffekte  $A$  und  $B$  sind vermischt. dies ist sicherlich nicht wünschenswert. Tabelle 3.27 verdeutlicht die Situation.

Tabelle 3.27: Teilplan eines  $2^3$ -Plans

|     | A | B | C | AB | AC | BC | ABC |
|-----|---|---|---|----|----|----|-----|
| (1) | - | - | - | +  | +  | +  | -   |
| ab  | + | + | - | +  | -  | -  | -   |
| c   | - | - | + | +  | -  | -  | +   |
| abc | + | + | + | +  | +  | +  | +   |

Schauen wir uns noch einen  $2^{4-1}$ -Plan an. Als Generator wählen wir  $I = ABCD$ . Also  $A = BCD$ ,  $B = ACD$ ,  $C = ABD$ ,  $D = ABC$ ,  $AB = CD$ ,  $AC = BD$  und  $AD = BC$ .

Man kann sich das an Tabelle 3.28 auf Seite 166 klarmachen. Hier sind alle Faktoren und Interaktionen, bei einem  $2^4$ -Plan zu finden. Der Teilplan ist in Tabelle 3.29 auf Seite 167 zu finden.

Tabelle 3.28: Alle Effekte eines  $2^4$ -Planes

|             | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>AB</i> | <i>C</i> | <i>AC</i> | <i>BC</i> | <i>ABC</i> | <i>D</i> | <i>AD</i> | <i>BD</i> | <i>ABD</i> | <i>CD</i> | <i>ACD</i> | <i>BCD</i> | <i>ABCD</i> |
|-------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|------------|----------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|------------|-------------|
| (1)         | -        | -        | +         | -        | +         | +         | -          | -        | +         | +         | -          | +         | -          | -          | +           |
| <i>a</i>    | +        | -        | -         | -        | -         | +         | +          | -        | -         | +         | +          | +         | +          | -          | -           |
| <i>b</i>    | -        | +        | -         | -        | +         | -         | +          | -        | +         | -         | +          | +         | -          | +          | -           |
| <i>ab</i>   | +        | +        | +         | -        | -         | -         | -          | -        | -         | -         | -          | +         | +          | +          | +           |
| <i>c</i>    | -        | -        | +         | +        | -         | -         | +          | -        | +         | +         | -          | -         | +          | +          | -           |
| <i>ac</i>   | +        | -        | -         | +        | +         | -         | -          | -        | -         | +         | +          | -         | -          | +          | +           |
| <i>bc</i>   | -        | +        | -         | +        | -         | +         | -          | -        | +         | -         | +          | -         | +          | -          | +           |
| <i>abc</i>  | +        | +        | +         | +        | +         | +         | +          | -        | -         | -         | -          | -         | -          | -          | -           |
| <i>d</i>    | -        | -        | +         | -        | +         | +         | -          | +        | -         | -         | +          | -         | +          | +          | -           |
| <i>ad</i>   | +        | -        | -         | -        | -         | +         | +          | +        | +         | -         | -          | -         | -          | +          | +           |
| <i>bd</i>   | -        | +        | -         | -        | +         | -         | +          | +        | -         | +         | -          | -         | +          | -          | +           |
| <i>abd</i>  | +        | +        | +         | -        | -         | -         | -          | +        | +         | +         | +          | -         | -          | -          | -           |
| <i>cd</i>   | -        | -        | +         | +        | -         | -         | +          | +        | -         | -         | +          | +         | -          | -          | +           |
| <i>acd</i>  | +        | -        | -         | +        | +         | -         | -          | +        | +         | -         | -          | +         | +          | -          | -           |
| <i>bcd</i>  | -        | +        | -         | +        | -         | +         | -          | +        | -         | +         | -          | +         | -          | +          | -           |
| <i>abcd</i> | +        | +        | +         | +        | +         | +         | +          | +        | +         | +         | +          | +         | +          | +          | +           |

Tabelle 3.29: Alle Effekte eines  $2^{4-1}$ -Planes

|             | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>AB</i> | <i>C</i> | <i>AC</i> | <i>BC</i> | <i>ABC</i> | <i>D</i> | <i>AD</i> | <i>BD</i> | <i>ABD</i> | <i>CD</i> | <i>ACD</i> | <i>BCD</i> | <i>ABCD</i> |
|-------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|------------|----------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|------------|-------------|
| (1)         | -        | -        | +         | -        | +         | +         | -          | -        | +         | +         | -          | +         | -          | -          | +           |
| <i>ab</i>   | +        | +        | +         | -        | -         | -         | -          | -        | -         | -         | -          | +         | +          | +          | +           |
| <i>ac</i>   | +        | -        | -         | +        | +         | -         | -          | -        | -         | +         | +          | -         | -          | +          | +           |
| <i>bc</i>   | -        | +        | -         | +        | -         | +         | -          | -        | +         | -         | +          | -         | +          | -          | +           |
| <i>ad</i>   | +        | -        | -         | -        | -         | +         | +          | +        | +         | -         | -          | -         | -          | +          | +           |
| <i>bd</i>   | -        | +        | -         | -        | +         | -         | +          | +        | -         | +         | -          | -         | +          | -          | +           |
| <i>cd</i>   | -        | -        | +         | +        | -         | -         | +          | +        | -         | -         | +          | +         | -          | -          | +           |
| <i>abcd</i> | +        | +        | +         | +        | +         | +         | +          | +        | +         | +         | +          | +         | +          | +          | +           |



# Anhang A

## Beweise und Herleitungen

### A.1 Varianzen und Kovarianzen

Sind  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  Zufallsvariablen und  $a$  und  $b$  reelle Zahlen, dann gilt

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Cov}(a + X, b + Y) = \text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) \quad (\text{A.5})$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad (\text{A.6})$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &\stackrel{(\text{A.1})}{=} \text{Cov}(aX + b, aX + b) \\ &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \text{Cov}(aX, aX) \\ &\stackrel{(\text{A.4})}{=} a^2 \text{Cov}(X, X) \\ &\stackrel{(\text{A.1})}{=} a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.7})$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - Y) &\stackrel{\text{(A.1)}}{=} \text{Cov}(X - Y, X - Y) \\ &\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X, X - Y) + \text{Cov}(-Y, X - Y) \\ &\stackrel{\text{(A.2)}}{=} \text{Cov}(X - Y, X) + \text{Cov}(X - Y, -Y) \\ &\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(-Y, X) + \text{Cov}(X, -Y) + \text{Cov}(-Y, -Y) \\ &\stackrel{\text{(A.4)}}{=} \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Y) \\ &\stackrel{\text{(A.1)}}{=} \text{Var}(X) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \\ &\stackrel{\text{(A.2)}}{=} \text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

## A.2 Der Beweis von Gleichung (2.81) auf Seite 70

Die Gültigkeit von Gleichung (2.81) auf Seite 70 sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
E(Z_t) &= E \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \right] \\
&= E \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} \right] + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \\
&= \lambda \cdot E \left[ \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} \right] + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \\
&= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j E(X_{t-j}) + (1-\lambda)^t \cdot \mu_0 \\
&= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \mu_0 + (1-\lambda)^t \cdot \mu_0 \\
&= \mu_0 \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j + (1-\lambda)^t \right] \\
&\stackrel{(A.11)}{=} \mu_0 \left[ \lambda \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^t}{1 - (1-\lambda)} + (1-\lambda)^t \right] \\
&= \mu_0 \left[ \lambda \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^t}{\lambda} + (1-\lambda)^t \right] \\
&= \mu_0 [1 - (1-\lambda)^t + (1-\lambda)^t] \\
&= \mu_0
\end{aligned}$$

### A.3 Der Beweis von Gleichung (2.82) auf Seite 70

Die Gültigkeit von Gleichung (2.82) auf Seite 70 sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z_t) &= \text{Var}\left(\lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot z_0\right) \\
 &\stackrel{\text{Var}(a+b \cdot Y) = a^2 \cdot \text{Var}(Y)}{=} \lambda^2 \cdot \text{Var}\left(\sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j}\right) \\
 &\stackrel{\text{Unabhängigkeit}}{=} \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \text{Var}\left((1-\lambda)^j X_{t-j}\right) \\
 &= \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \cdot \sigma^2 \\
 &= \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} [(1-\lambda)^2]^j \\
 &\stackrel{\text{(A.11)}}{=} \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}}{1 - (1-\lambda)^2} \\
 &= \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}}{1 - 1 + 2 \cdot \lambda - \lambda^2} \\
 &= \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}]
 \end{aligned}$$

## A.4 Die geometrische Folge

Die Folge  $a_1, a_2, \dots$  heißt geometrische Folge, wenn gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{A.8})$$

Ist  $a_1 = a$ , so erhalten wir die Folge  $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$ . Gilt  $|q| < 1$ , so konvergiert die geometrische Folge gegen 0.

Wir betrachten nun die ersten  $n$  Summanden der geometrischen Folge in Gleichung

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \quad (\text{A.9})$$

Multiplizieren wir Gleichung (A.9) mit  $q$ , so erhalten wir

$$q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \quad (\text{A.10})$$

Subtrahieren wir Gleichung (A.10) von Gleichung (A.9), so erhalten wir

$$S_n - q \cdot S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - (q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n) = 1 - q^n$$

Also gilt

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## A.5 Herleitung des Schätzers von $\mu$ in Gleichung (3.2)

Wir suchen den Wert von  $\mu$ , für den

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2$$

minimal wird.

Wir bestimmen die erste Ableitung dieses Ausdrucks

$$\frac{d}{d\mu} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{d}{d\mu} (y_i - \mu)^2 = (-2) \sum_{i=1}^N (y_i - \mu)$$

Der K-Q-Schätzer  $\hat{\mu}$  von  $\mu$  muss also folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\mu}) = 0$$

Wir formen diese Gleichung um

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\mu}) = 0 &\iff \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N \hat{\mu} = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^N \hat{\mu} = \sum_{i=1}^N y_i \\ &\iff N \hat{\mu} = \sum_{i=1}^N y_i \\ &\iff \hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \bar{y} \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird von  $\hat{\mu} = \bar{y}$  erfüllt. Die zweite Ableitung von Gleichung (3.3) nach  $\mu$  ist  $2N$ . Also handelt es sich um ein Minimum.

## A.6 Herleitung der Schätzer von $\mu_1$ und $\mu_2$ in Gleichung (3.5)

Wir suchen also die Werte von  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , für die

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \mu_2)^2$$

minimal wird.

Wir bestimmen die ersten partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks. es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left( \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \mu_2)^2 \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu_1} (y_{1j} - \mu_1)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \mu_1) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \mu_2} \left( \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \mu_2)^2 \right) = \sum_{j=1}^n (-2)(y_{2j} - \mu_2)$$

Die K-Q-Schätzer  $\hat{\mu}_1$  und  $\hat{\mu}_2$  von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  müssen also die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \hat{\mu}_1) = 0$$

und

$$\sum_{j=1}^n (y_{2j} - \hat{\mu}_2) = 0.$$

Hieraus folgt für  $i = 1, 2$ :

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}.$$

Wie man leicht nachprüft, handelt es sich um ein Minimum.

## A.7 Der Beweis von Gleichung (3.13) auf Seite 94

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij}^2 - 2 y_{ij} \bar{y} + \bar{y}^2 - y_{ij}^2 + 2 y_{ij} \bar{y}_i - \bar{y}_i^2) \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (2 y_{ij} \bar{y}_i - 2 y_{ij} \bar{y} + \bar{y}^2 - \bar{y}_i^2) \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (2 y_{ij} \bar{y}_i - 2 y_{ij} \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (\bar{y}^2 - \bar{y}_i^2) \\
& \sum_{i=1}^2 (2 n \bar{y}_i \bar{y}_i - 2 n \bar{y}_i \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 n (\bar{y} - \bar{y}_i)(\bar{y} + \bar{y}_i) \\
& \sum_{i=1}^2 (2 n \bar{y}_i (\bar{y}_i - \bar{y}) - n (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y} + \bar{y}_i)) \\
& \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \bar{y})(2 n \bar{y}_i - n \bar{y} - n \bar{y}_i) \\
& \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \bar{y})(n \bar{y}_i - n \bar{y}) \\
& \sum_{i=1}^2 n (\bar{y}_i - \bar{y})^2
\end{aligned}$$



## A.8 Der Beweis von Gleichung (3.15) auf Seite 94

Es gilt

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n y_{ij} = \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n y_{1j} + \sum_{j=1}^n y_{2j} \right) \stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{2n} (n\bar{y}_1 + n\bar{y}_2) \\ &= \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} SS_A &= n(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + n(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 \\ &= n \left( \bar{y}_1 - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right)^2 + n \left( \bar{y}_2 - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right)^2 \\ &= n \left( \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2} \right)^2 + n \left( \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{2} \right)^2 = \frac{n(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}{2} \end{aligned}$$

## A.9 Der Beweis von Gleichung (3.17) auf Seite 99

Es gilt

$$\begin{aligned} SS_A &= \frac{n(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}{2} \\ &= \frac{n \left( \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{2j} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j} \right) \right)^2}{2} \\ &= \frac{n \left( \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j} \right) \right)^2}{2} = \frac{\left( \sum_{j=1}^n y_{2j} - \sum_{j=1}^n y_{1j} \right)^2}{2n} \end{aligned}$$

## A.10 Die Schätzer in Gleichung (3.18) auf Seite 109 sind nicht eindeutig

Wir suchen Werte von  $\mu$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , sodass

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

minimal wird.

Sei

$$f(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \mu - \alpha_1)^2 + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \mu - \alpha_2)^2$$

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mu} f(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \mu - \alpha_1) + \sum_{j=1}^n (-2)(y_{2j} - \mu - \alpha_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} f(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \mu - \alpha_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} f(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \mu - \alpha_2)$$

Die notwendigen Bedingungen für einen Extremwert in  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{\alpha}_2$  sind

$$\sum_{j=1}^n (y_{1j} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_1) + \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_2) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_1) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (-2)(y_{1j} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_2) = 0$$

Die Summe der zweiten und dritten Gleichung ist gleich der ersten Gleichung. Somit ist eine Gleichung redundant.

## A.11 Der Beweis von Gleichung (3.31) auf Seite 114

Wir setzen in die Gleichung (3.25) auf Seite 112 für  $\mu$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Schätzer aus den Gleichungen (3.26), (3.27) und (3.28) auf Seite 112 und formen um:

$$\begin{aligned}
 SS_R &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} - (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}) - (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y})^2
 \end{aligned}$$

## A.12 Der Beweis von Gleichung (3.51) auf Seite 122

Wir setzen in die Gleichung (3.44) auf Seite 119 für  $\mu$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  und  $(\alpha\beta)_{ij}$  die Schätzer aus den Gleichungen (3.45), (3.46), (3.47) und (3.48) auf Seite 119 ein und formen um.

$$\begin{aligned}
 SS_R &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \widehat{(\alpha\beta)}_{ij})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} - (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}) - (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}) - (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} - \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y} - \bar{y}_{ij} + \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij})^2
 \end{aligned}$$

### A.13 Der Beweis von Gleichung (3.52) auf Seite 126

Es gilt

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^2 y_{ijk} = \frac{1}{4n} \left( \sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^2 y_{1jk} + \sum_{j=1}^1 \sum_{k=1}^2 y_{2jk} \right) \\ &= \frac{1}{4n} (2n \bar{y}_1 + 2n \bar{y}_2) = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}SS_A &= 2n (\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + 2n (\bar{y}_2 - \bar{y})^2 \\ &= 2n \left( \bar{y}_1 - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right)^2 + 2n \left( \bar{y}_2 - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right)^2 \\ &= 2n \left( \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2} \right)^2 + 2n \left( \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{2} \right)^2 \\ &= n (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2\end{aligned}$$

# Anhang B

## Tabellen

Tabelle B.1: Werte von  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $A_2$ ,  $D_3$  und  $D_4$

| $n$   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $d_2$ | 1.128 | 1.693 | 2.059 | 2.326 | 2.534 | 2.704 | 2.847 | 2.970 | 3.078 |
| $d_3$ | 0.853 | 0.888 | 0.880 | 0.864 | 0.848 | 0.833 | 0.820 | 0.808 | 0.797 |
| $A_2$ | 1.880 | 1.023 | 0.729 | 0.577 | 0.483 | 0.419 | 0.373 | 0.337 | 0.308 |
| $D_3$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.076 | 0.136 | 0.184 | 0.223 |
| $D_4$ | 3.267 | 2.574 | 2.282 | 2.115 | 2.004 | 1.924 | 1.864 | 1.816 | 1.777 |

Tabelle B.2: Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung

| $\nu$ | $chi^2_{\nu;0.025}$ | $chi^2_{\nu;0.975}$ |
|-------|---------------------|---------------------|
| 1     | 0.001               | 5.024               |
| 2     | 0.051               | 7.378               |
| 3     | 0.216               | 9.348               |
| 4     | 0.484               | 11.143              |
| 5     | 0.831               | 12.833              |
| 6     | 1.237               | 14.449              |
| 7     | 1.690               | 16.013              |
| 8     | 2.180               | 17.535              |
| 9     | 2.700               | 19.023              |
| 10    | 3.247               | 20.483              |
| 11    | 3.816               | 21.920              |
| 12    | 4.404               | 23.337              |
| 13    | 5.009               | 24.736              |
| 14    | 5.629               | 26.119              |
| 15    | 6.262               | 27.488              |
| 16    | 6.908               | 28.845              |
| 17    | 7.564               | 30.191              |
| 18    | 8.231               | 31.526              |
| 19    | 8.907               | 32.852              |
| 20    | 9.591               | 34.170              |

Tabelle B.3: Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  der Standardnormalverteilung

| $z$ | .00     | .01     | .02     | .03     | .04     |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 |

Tabelle B.4: Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  der Standardnormalverteilung

| $z$ | .05     | .06     | .07     | .08     | .09     |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |



Tabelle B.5: Das 0.95-Quantil  $F_{m,n;0.95}$  der  $F$ -Verteilung mit  $m$  und  $n$  Freiheitsgraden

| n  | m      |       |        |        |        |        |        |
|----|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 1      | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| 1  | 161.45 | 199.5 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 |
| 2  | 18.51  | 19.00 | 19.16  | 19.25  | 19.30  | 19.33  | 19.35  |
| 3  | 10.13  | 9.55  | 9.28   | 9.12   | 9.01   | 8.94   | 8.89   |
| 4  | 7.71   | 6.94  | 6.59   | 6.39   | 6.26   | 6.16   | 6.09   |
| 5  | 6.61   | 5.79  | 5.41   | 5.19   | 5.05   | 4.95   | 4.88   |
| 6  | 5.99   | 5.14  | 4.76   | 4.53   | 4.39   | 4.28   | 4.21   |
| 7  | 5.59   | 4.74  | 4.35   | 4.12   | 3.97   | 3.87   | 3.79   |
| 8  | 5.32   | 4.46  | 4.07   | 3.84   | 3.69   | 3.58   | 3.50   |
| 9  | 5.12   | 4.26  | 3.86   | 3.63   | 3.48   | 3.37   | 3.29   |
| 10 | 4.96   | 4.10  | 3.71   | 3.48   | 3.33   | 3.22   | 3.14   |
| 11 | 4.84   | 3.98  | 3.59   | 3.36   | 3.20   | 3.09   | 3.01   |
| 12 | 4.75   | 3.89  | 3.49   | 3.26   | 3.11   | 3.00   | 2.91   |
| 13 | 4.67   | 3.81  | 3.41   | 3.18   | 3.03   | 2.92   | 2.83   |
| 14 | 4.60   | 3.74  | 3.34   | 3.11   | 2.96   | 2.85   | 2.76   |
| 15 | 4.54   | 3.68  | 3.29   | 3.06   | 2.90   | 2.79   | 2.71   |
| 16 | 4.49   | 3.63  | 3.24   | 3.01   | 2.85   | 2.74   | 2.66   |
| 17 | 4.45   | 3.59  | 3.20   | 2.96   | 2.81   | 2.70   | 2.61   |
| 18 | 4.41   | 3.55  | 3.16   | 2.93   | 2.77   | 2.66   | 2.58   |
| 19 | 4.38   | 3.52  | 3.13   | 2.90   | 2.74   | 2.63   | 2.54   |
| 20 | 4.35   | 3.49  | 3.10   | 2.87   | 2.71   | 2.60   | 2.51   |
| 21 | 4.32   | 3.47  | 3.07   | 2.84   | 2.68   | 2.57   | 2.49   |
| 22 | 4.30   | 3.44  | 3.05   | 2.82   | 2.66   | 2.55   | 2.46   |
| 23 | 4.28   | 3.42  | 3.03   | 2.80   | 2.64   | 2.53   | 2.44   |
| 24 | 4.26   | 3.40  | 3.01   | 2.78   | 2.62   | 2.51   | 2.42   |
| 25 | 4.24   | 3.39  | 2.99   | 2.76   | 2.60   | 2.49   | 2.40   |
| 26 | 4.23   | 3.37  | 2.98   | 2.74   | 2.59   | 2.47   | 2.39   |
| 27 | 4.21   | 3.35  | 2.96   | 2.73   | 2.57   | 2.46   | 2.37   |
| 28 | 4.20   | 3.34  | 2.95   | 2.71   | 2.56   | 2.45   | 2.36   |
| 29 | 4.18   | 3.33  | 2.93   | 2.70   | 2.55   | 2.43   | 2.35   |
| 30 | 4.17   | 3.32  | 2.92   | 2.69   | 2.53   | 2.42   | 2.33   |

# Literatur

- Bissell, D. (1994). *Statistical Methods for SPC and TQM* (1 ed.). London: Chapman & Hall.
- Deming, W. (1986). *Out of the Crisis* (1 ed.). Cambridge: MIT Center for Advanced Engineering Study.
- Kirstein, H. (1994). Qualitätsmanagement im unternehmen: Philosophie – strategie – methode. In G. F. Kamiske (Ed.), *Die hohe Schule des TQM*. Berlin: Springer.
- Krehbiel, T. (1994). Tampering with a stable process. *Teaching Statistics* 16, 75–79.
- Lenth, R. V. (1989). Quick and easy analysis of unreplicated factorials. *Technometrics* 31(4), 469–473.
- Montgomery, D. C. (2008). *Introduction to Statistical Quality Control* (6 ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
- Montgomery, D. C. (2012). *Design and Analysis of Experiments* (8 ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
- Oess, A. (1994). *Total Quality Management: Die ganzheitliche Qualitätsstrategie* (3 ed.). Wiesbaden: Dr. Th. Gabler.
- Sparks, R. and J. Field (2000). Using deming’s funnel experiment to demonstrate effects of violating assumptions underlying shewhart’s control charts. *The American Statistician* 54, 291–302.